

Chapitre XXI : Mesures

Caractéristique d'Euler-Poincaré

Fonctionnelles de Minkowski

Formule de Steiner

Analyse individuelle et stéréologie

Passage aux fonctions numériques

Autres mesures

- **nombre de convexité**
- **dimension fractale**

Fonctionnelles ensemblistes

- Une **fonctionnelle ensembliste** est un nombre W mesuré sur un ensemble $X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, et qui le décrit. On le nomme aussi *mesure* ou *paramètre*. Pour qu'il soit fiable et représentatif, on lui demande souvent:
 - d'être échantillonnable, ce que permet la condition de **c-additivité**:
$$W(X \cup Y) + W(X \cap Y) = W(X) + W(Y) \quad X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n);$$
 - d'être **homogène**, *i.e.* autonome vis à vis des grossissements:
$$W(kX) = k^p \cdot W(X) \quad k \text{ entier } \geq 0; \quad 0 \leq p \leq n;$$
 - d'être **invariant pour les translations**:
$$W(X_b) = W(X) \quad b \text{ vecteur}$$
ou, plus sévèrement, pour les déplacements (translations + rotations);
 - une certaine robustesse, *e.g.* que W soit **continue**, ou soit **croissante**, sur la classe des compacts convexes.

Modèle et notations

- *Anneau convexe :*

Les fonctionnelles envisagées ici portent sur l'anneau convexe, *i.e.* sur la classe des **réunions finies de compacts convexes** de \mathbb{R}^n .

- *Symboles de déplacements :*

- α désigne les angles du plan, et ω les angles solides de l'espace;
- $\{x\}$ représente le point $x \in E$ considéré en tant qu'élément de $\mathcal{P}(E)$;
- $\Delta(x, \alpha)$, *resp.* $\Delta(x, \omega)$, la droite de \mathbb{R}^2 , *resp.* \mathbb{R}^3 , passant par x et de direction α , *resp.* ω ;
- $\Pi(x, \omega)$ désigne le plan de \mathbb{R}^3 passant par x et de normale ω .

Caractéristique d'Euler-Poincaré dans \mathbb{R}^1

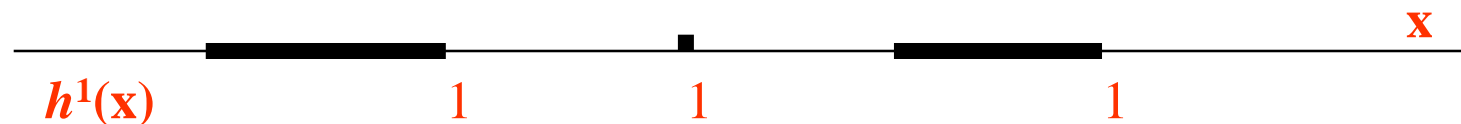
- La caractéristique **d'Euler-Poincaré** (ou nombre de connexité ou encore CEP) v se définit à l'aide d'une récurrence portant sur les dimensions de l'espace.
- Pour $n = 0$, l'espace est conventionnellement réduit à un point, et $v^0(X) = 1$ ou 0 selon que X est ce point ou l'ensemble vide.

- Pour $n = 1$ posons

$$h^1(x) = v^0(X \cap \{x\}) - v^0(X \cap \{x + 0\}) \quad (x + 0, \text{ limite à droite en } x)$$

Le terme $h^1(x)$ n'est $\neq 0$ qu'aux extrémités droites x_i des segments qui forment X , où il vaut 1. La somme

$$v^1(X) = \sum h^1(x_i) \quad \text{définit alors la C.E.P. dans } \mathbb{R}^1.$$



Caractéristique d'Euler-Poincaré dans \mathbb{R}^2

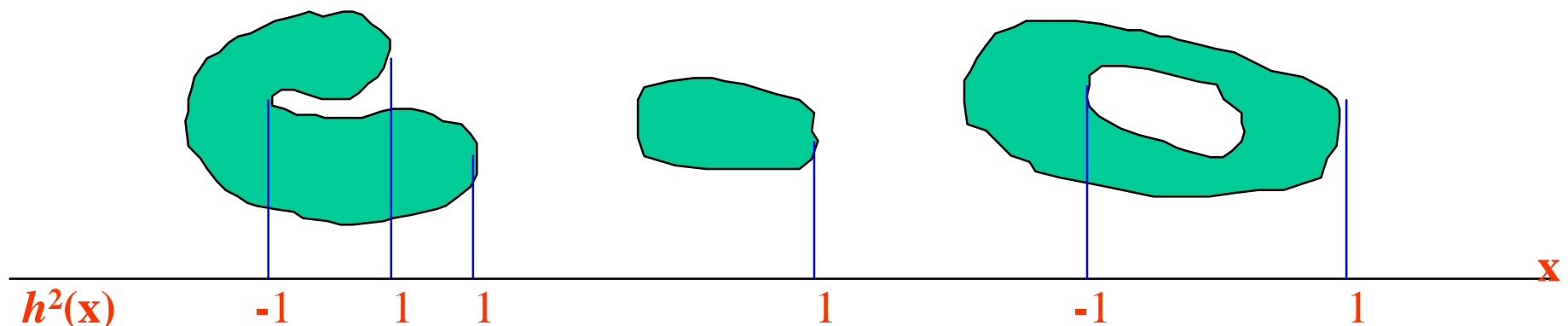
- Dans \mathbb{R}^2 , on introduit de même

$$h^2(x) = v^1(X \cap \Delta(x)) - v^1(X \cap \Delta(x + 0))$$

A nouveau, $h^2(x)$ n'est $\neq 0$ qu'aux sorties convexes x_g des grains, où il vaut +1, et aux entrées convexes x_p dans les pores, où il vaut -1. Dans l'anneau convexe, ces endroits sont en nombre fini, et la quantité

$$v^2(X) = \sum h^2(x_g) - \sum h^2(x_p)$$

définit la CEP dans \mathbb{R}^2 . Comme on le voit, $v^2(X)$ est égal au **nombre des grains de X diminué de celui des pores**:



Caractéristique d'Euler-Poincaré dans \mathbb{R}^3

- Dans \mathbb{R}^3 , le principe reste le même, et

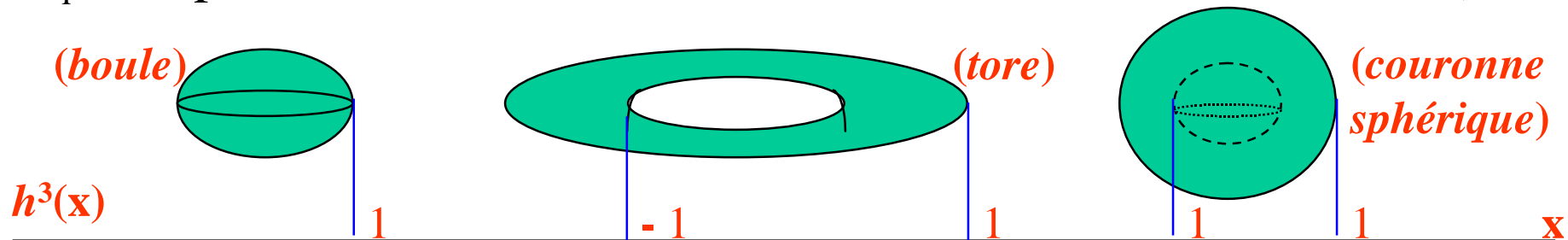
$$h^3(x) = v^2(X \cap \Pi(x)) - v^2(X \cap \Pi(x + 0))$$

induit, par sommation en x , $v^3(X) = \sum h^3(x_i)$.

- On appelle **genre** d'une frontière connexe ∂Y le nombre maximal des courbes fermées que l'on peut tracer sur ∂Y sans la disconnecter. Il vaut 0 pour une sphère, 1 pour un tore, 2 pour un tore muni d'une anse, etc... On montre que la C.E.P. $v^3(X)$ est égale à :

$$v^3(X) = \sum [1 - G(\partial X_i)]$$

(∂X_i : composantes connexes, internes et externes, de la frontière ∂X).



Propriétés de la C.E.P.

- **Théorème** : Sur l'anneau convexe, la *seule* fonctionnelle c-additive et constante pour les convexes est la caractéristique d'Euler-Poincaré .

La CEP, invariante par translation et isotrope, ne dépend pas de la direction qui a servi à la construire. Elle est de dimension 0, donc invariante pour les homothéties.

- **Fonctionnelles de Minkowski** : Partant d'un ensemble X de \mathbb{R}^n , on peut s'intéresser aux CEP des sections $X \cap \Pi_k$ par des hyper-plans de dimension k ($0 \leq k \leq n$), puis à leurs sommes selon les déplacements quand Π_k varie. On obtient ainsi $n+1$ fonctionnelles qui, par construction, sont

- invariante par déplacement ;
- homogènes de degré $n - k$;
- c-additives ;
- croissantes et continues pour les convexes.

Ce sont les fonctionnelles de Minkowski

Fonctionnelles de Minkowski

L'importance des fonctionnelles de Minkowski découle du résultat suivant:

- ***Théorème (Hadwiger, 1957)*** : Toute fonctionnelle définie sur l'anneau convexe, invariante pour les déplacements, c-additive et continue (ou aussi bien croissante) sur les convexes est une combinaison linéaire des fonctionnelles de Minkowski.
- ***Interprétation géométrique.*** Dans \mathbb{R}^n , à un facteur près:
 - la première fonctionnelle (degré n) est la **mesure de Lebesgue** de X, croissante et semi-continue supérieurement,
 - la seconde (degré n-1) est la **mesure superficielle** de la frontière ∂X ,
 - l'avant dernière (degré 1) est la **largeur moyenne**, caractérisée, sur les convexes, par sa linéarité

$$M(\lambda X \oplus \mu Y) = \lambda M(X) + \mu M(Y)$$

Fonctionnelles de Minkowski dans \mathbb{R}^1 et \mathbb{R}^2

- Par exemple, dans \mathbb{R}^1 , les fonctionnelles se réduisent à
 - la **longueur** $L(\mathbf{X})$ de l'ensemble \mathbf{X} ,
 - et le **nombre** $v^0(\mathbf{X})$ des segments qui constituent \mathbf{X} .
- Dans \mathbb{R}^2 , leurs trois valeurs sont **l'aire** A , le **périmètre** U et la **CEP** v^2

avec
$$U(\mathbf{X}) = \int_{\pi} d\alpha \int_{\mathbb{R}} v^1[\mathbf{X} \cap \Delta(\mathbf{x}, \alpha)] d\mathbf{x}$$

(le périmètre égale la somme des nombres d'intercepts pris dans toutes les directions).

De plus, lorsque \mathbf{X} est compact convexe, le périmètre se relie aux **projections** de \mathbf{X} sur les droites Δ_{α} par la relation

$$U(\mathbf{X}) = \int_{2\pi} L(\mathbf{X} | \Delta_{\alpha}) d\alpha .$$

Stéréologie

- Une mesure sur une famille d'ensembles de \mathbb{R}^n est stéréologique quand elle peut s'écrire comme fonction de mesures sur des ensembles de \mathbb{R}^k , où $k < n$.
- Par construction, les fonctionnelles de Minkowski sont toutes **stéréologiques** sauf la dernière (la CEP). En particulier, dans \mathbb{R}^3
pour le *volume*, il suffit d'échantillonner par des *points*,
« *surface* » « *droites*,
« *norme* » « *plans*.
- La stéréologie intervient le plus souvent entre grandeurs spécifiques, *i.e.* dans le cadre stationnaire. Si $V_V(X)$ désigne le volume de X par unité de volume d'espace, $S_V(X)$ sa surface spécifique, N_A et N_L les CEP spécifiques dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^1 (ou leurs moyennes de rotation le cas échéant) etc.. les relations précédentes deviennent :

$$V_V = A_A = L_L \quad S_V = 4 N_L = (4/\pi) U_A \quad M_V = 2\pi N_A$$

Fonctionnelles de Minkowski dans \mathbb{R}^3

- Dans \mathbb{R}^3 , les quatre fonctionnelles sont **le volume V** , la **surface S** , la **norme M** , et la **CEP v^3** . Surface et norme se relient aux CEP v^1 et v^2 par

$$\pi S(\mathbf{X}) = \int_{4\pi} d\omega \int_{\mathbb{R}} v^1[\mathbf{X} \cap \Delta(\mathbf{x}, \omega)] d\mathbf{x}$$

$$2M(\mathbf{X}) = \int_{4\pi} d\omega \int_{\mathbb{R}} v^2[\mathbf{X} \cap \Pi(\mathbf{x}, \omega)] d\mathbf{x}$$

- En particulier, quand \mathbf{X} est **convexe**, sa surface et sa norme s'interprètent en termes de **projections** $\mathbf{X} | \Pi_\omega$ et $\mathbf{X} | \Delta_\omega$ sur les plans Π_ω et droites Δ_ω :

$$\pi S(\mathbf{X}) = \int_{4\pi} A(\mathbf{X} | \Pi_\omega) d\omega$$

$$2M(\mathbf{X}) = \int_{4\pi} L(\mathbf{X} | \Delta_\omega) d\omega = (2/\pi) \int_{4\pi} U(\mathbf{X} | \Pi_\omega) d\omega$$

- Enfin, si $\partial\mathbf{X}$ admet des courbures C_1 et C_2 en tout point, alors

$$2M(\mathbf{X}) = \int_{\partial\mathbf{X}} (C_1 + C_2) ds$$

Formules de Steiner pour les convexes

Lorsque X et B sont compacts **convexes**, les fonctionnelles de $X \oplus B$ s'expriment très simplement à partir de celles de X et de B . On l'a déjà vu pour la norme; pour le volume, il vient

dans \mathbb{R}^2 ,

$$\bar{A}(X \oplus B) = A(X) + U(X) \cdot U(B) / 2\pi + A(B)$$

dans \mathbb{R}^3 ,

$$\bar{V}(X \oplus B) = V(X) + [M(X) \cdot S(B) + S(X) \cdot M(B)] / 4\pi + V(B)$$

où \bar{A} et \bar{V} sont les moyennes de rotation quand B prend toutes les orientations par rapport à X .

Ces formules, établies par Steiner en 1839 dans de cas où B est une boule, sont utiles pour calculer des modèles d'ensembles aléatoires booléens.

Formules de Steiner, cas particuliers

- Lorsqu'on prend pour B le **segment unité**, il vient
 - dans \mathbb{R}^2 , $A(X \oplus r B) = A(X) + r U(X) / \pi$
 - dans \mathbb{R}^3 , $V(X \oplus r B) = V(X) + r S(X) / 4$
- Si maintenant B est le **disque unité**, il vient
 - dans \mathbb{R}^2 , $A(X \oplus r B) = A(X) + r U(X) + \pi r^2$
 - dans \mathbb{R}^3 , $V(X \oplus r B) = V(X) + \pi r S(X) / 4 + r^2 M(X) / 2$
- Enfin, dans \mathbb{R}^3 , pour B la **boule unité**
$$V(X \oplus r B) = V(X) + r S(X) + r^2 M(X) + 4/3 \pi r^3.$$

Dans tous les cas, la mesure du dilaté est une fonction polynomiale de la taille de l'élément structurant, de degré la dimension de celui-ci. On montre que pour r petit, les termes du premier ordre s'étendent à l'anneau convexe.

Individus et Pondérations (I) : volumes

- *Mesures globales ou analyse individuelle ?*

Dans ce qui précède, on a toujours considéré X comme un tout. Que peut-on dire de plus quand on partitionne l'ensemble X en individus Y (grains, groupes de grains) pas forcément connexes mais identifiables sur les sections ? Comment les tailles vues en coupes se relient-elles à celles dans l'espace, par exemple ?

Notons $E[*]$ la moyenne du paramètre $*$ prise pour tous les objets, et par $\underline{*}$ la moyenne de $*$ pour toutes les sections de tous les objets et dans toutes les directions.

- *Inaccessibilité du volume moyen*

Dans \mathbb{R}^3 , la relation stéréologique principale est la suivante

$$E[V(Y)] = \underline{A}(Y \cap \Pi) \cdot \underline{L}(Y \mid \Delta) = \underline{A}(Y \mid \Pi) \cdot \underline{L}(Y \cap \Delta)$$

résultat assez décevant, car les termes de projection ne sont pas accessibles à partir de coupes planes.

Individus et Pondérations (2) : nombres

Notons $I(*)$ le nombre des individus de $*$, valeur égale à la CEP de X quand ceux-ci sont convexes. on a

$$\underline{I}(X \cap \Pi) = I(X) \cdot \underline{L}(X | \Delta)$$

nombre = nombre . diamètre
(dans \mathbb{R}^2) (dans \mathbb{R}^3) (moyen)

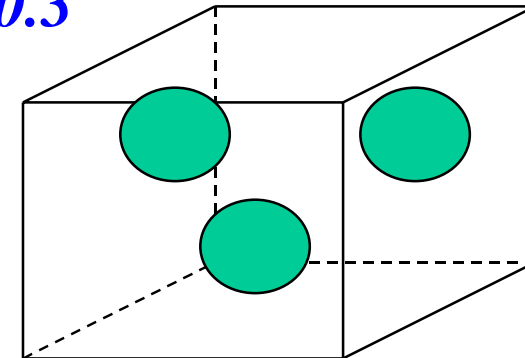
et de même

$$\underline{I}(X \cap \Delta) = I(X) \cdot \underline{A}(X | \Pi)$$

Par exemple, en fig. a) on trouve en moyenne sur les sections $I = 9$ alors que fig. b), qui a plus de sphères, mais plus petites, donne $I = 7$.

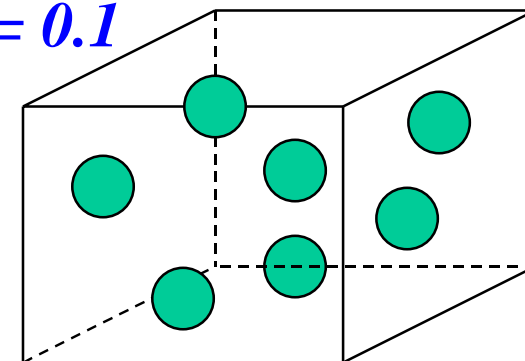
$$D = 0.3$$

a)



$$D = 0.1$$

b)



Généralisation aux fonctions numériques

- *Modèle de fonctions*

Afin de généraliser ce qui précède, prenons pour modèle la classe \mathcal{F} des fonctions $f : \mathbb{R}^2$ (ou \mathbb{R}^n) $\rightarrow [0, +\infty]$ dont toutes les sections

$$X_t(f) = \{x : x \in \mathbb{R}^2, f(x) \geq t\}$$

sont dans l'anneau convexe. Les W deviennent des applications de \mathcal{F} dans \mathbb{R}

- *Généralisation des prérequisites*

- La c- additivité devient

$$W(f \vee g) + W(f \wedge g) = W(f) + W(g) \quad f, g \in \mathcal{F}$$

- l' invariance par déplacement ne porte plus que sur les translations horizontales, et les rotations d' axe vertical;
- enfin la condition de croissance s'étend directement.

Quid de l'homogénéité ?

- *Homothéties ou affinités ?*

La classe \mathcal{F} modélise des images de gris, où l'axe T (intensité lumineuse) est hétérogène à l'espace. Dans ces conditions, la compatibilité avec les homothéties n'a plus grand sens. Celle avec les affinités en a-t-elle davantage ?

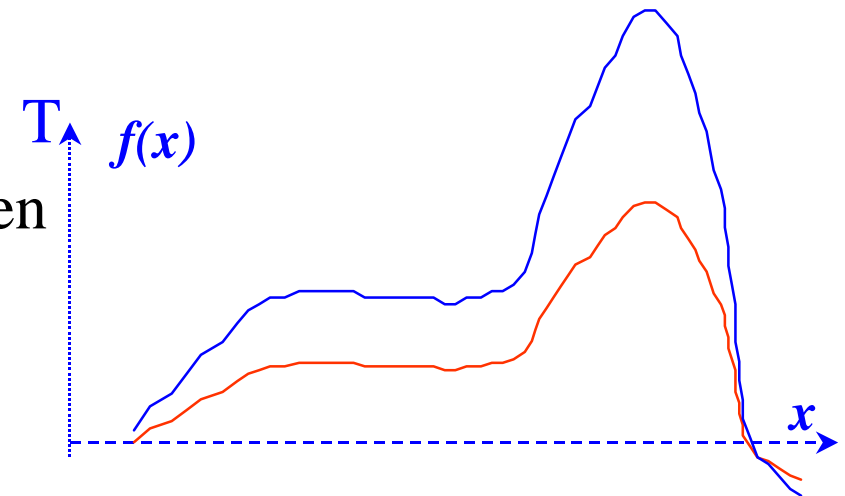
- *Exemple : longueur l d'une courbe*

Dans l'affinité de rapport 2, les zones plates gardent leur longueur, celles en pente s'allongent.

- *Raison :*

$$l = \int [1 + (f'(x))^2] dx$$

La longueur n'est plus un bon paramètre (la surface sous la courbe le reste !)



Dimensionnalité

- Il faut séparer les homothéties de l'espace de celles de l'axe des intensités
On dit que la fonctionnelle W est dimensionnelle quand

$$W[\lambda.f(\mu.x)] = \lambda^k \cdot \mu^p \cdot W[f(x)] \quad x \in \mathbb{R}^n, f \in \mathcal{F}$$

où k et p , entiers $\neq 0$, sont les **dimensions** de la mesure W . La contrainte de dimensionnalité oriente vers les produits d'opérations planaires par celles, «verticales», où le voisinage est réduit à un point.

- La généralisation des fonctionnelles de Minkowski consiste alors à sommer en t celles définies sur les sections. Dans \mathbb{R}^2 , on tire des aires des sections le **volume** $V(f)$ et l'**histogramme cumulé** $G_f(t)$:

$$V(f) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx = \int_T A[X_t(f)] dt$$

$$G_f(t) = \int_{-\infty}^t A[X_t(f)] dt / V(f)$$

Périmètre et gradient

- D'après la formule de Steiner, étendue à l'anneau convexe, le périmètre vaut la dérivée à l'origine de la dilatation par un disque :

$$r \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad [A(X_t \oplus r B) - A(X_t)] \rightarrow r U(X_t)$$

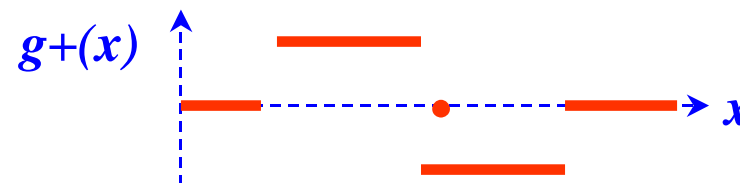
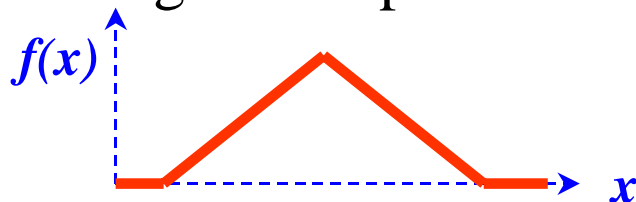
- Quand X_t est réunion finie des convexes $Y_i(t)$, cette limite est majorée par la somme finie $\Sigma [A(Y_i(t) \oplus r B) - A(Y_i(t))]$; on peut donc écrire

$$\int_T U[X_t(f)] dt = \lim_{r \rightarrow 0} [(V(f \oplus r B) - V(f)) / r]$$

relation qui donne une signification euclidienne au **gradient de Beucher** par dilatation g^+ (et prouve son existence sur l'anneau convexe), d'où

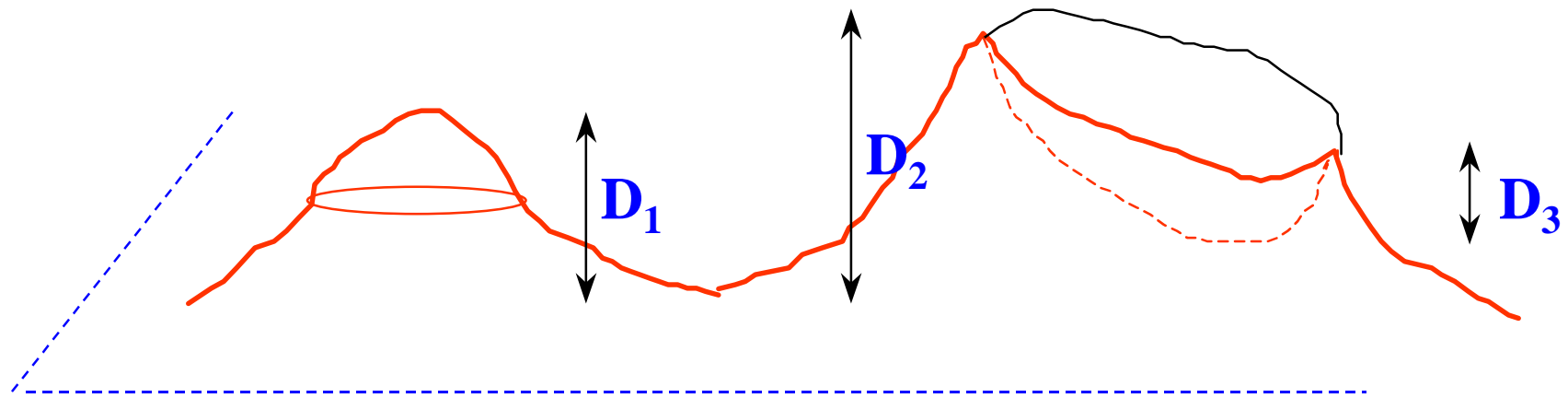
$$\int_T U[X_t(f)] dt = \int_{\mathbb{R}^2} g^+(x) dx$$

N.B. Ce gradient peut rester défini même quand le gradient usuel ne l'est plus



Nombre de connexité et dénivelés

La somme des CEP des sections de la fonction f mesure les dénivelés de la fonction. Pour l'exemple de la figure, il vient



$$\int_T v [X_t(f)] dt = D_1 + D_2 - D_3$$

Autres mesures

- D'autres mesures seront étudiées par la suite. Lorsqu'elles mettent en jeu des **dérivées** d'érosions, le modèle sous jacent reste **l'anneau convexe** :
 - Ex. **rugosité** (ch.13), **rose des directions**

Si elles ne font intervenir que des **surfaces** d'érodés ou de dilatés, il suffit de supposer **X compact** :

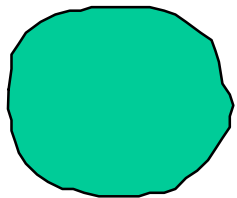
- Ex. **étoile** (ch.13), **portée** (ch.12), **dénombrements booléens** (ch.14)
- Bien qu'elles admettent souvent une interprétation stéréologique, ces fonctionnelles ne satisfont plus à toutes les conditions hadwigeriennes, et en particulier à la c-additivité.
- Terminons ce chapitre par deux mesures non hadwigeriennes, l'une dans l'anneau convexe (**le nombre de convexité**) l'autre sur les compacts (**la dimension fractale**).

Nombre de convexité

Considérons, dans \mathbb{R}^2 la droite test Δ_α de normale $\alpha \pm d\alpha/2$, et soit $N^+(X, \alpha)$

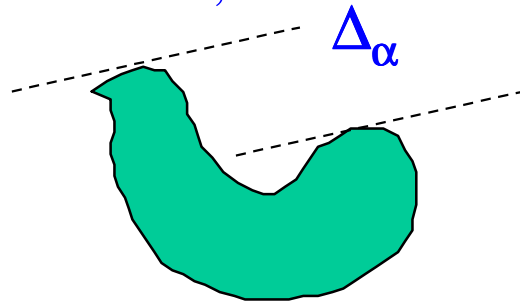
$$N^+ = 1$$

$$N^- = 0$$



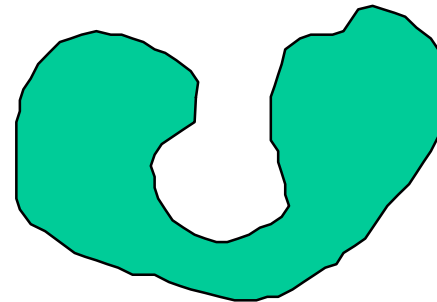
$$N^+ = 1,1$$

$$N^- = 0,1$$



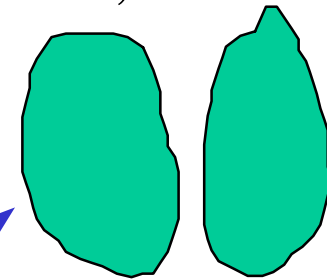
$$N^+ = 1,7$$

$$N^- = 0,7$$



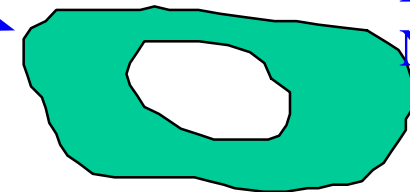
$$N^+ = 2$$

$$N^- = 0$$



$$N^+ = 1$$

$$N^- = 1$$



le nombre de ses premiers contacts avec X quand elle balaye le plan. On a

$$N^+(X) = \int_{2\pi} N^+(X, \alpha) d\alpha = \int_{R>0} du / R ,$$

si ∂X admet en tout element du un rayon de courbure R . De même

$$N^-(X) = \int_{2\pi} N^-(X, \alpha) d\alpha = \int_{R<0} du / |R| .$$

Ces deux **nombre de convexité** se relie à la CEP par $v(X) = N^+(X) - N^-(X)$

Dimension fractale (I)

- *Définition*

Plaçons nous dans \mathbb{R}^2 . Lorsqu'on dilate, ou qu'on érode, un compact X par un petit disque $r B$, de rayon tendant vers zéro, il arrive que, sous l'apparition de détails de plus en plus fins, l'accroissement de surface rapporté à r ne tende pas vers le périmètre, fini, de la relation de Steiner, mais vers l'infini.

Dans ce cas, il existe une plus petite valeur α telle que

$$A(X \oplus r B) - A(X \ominus r B) = k r^\alpha + o(r^\alpha) \quad 1 \leq \alpha \leq 2$$

(k constante). La valeur $d = 2 - \alpha$ définit la **dimension de Minkowski** de X .

- *Exemples* :
 - Ensembles de l'anneau convexe, $d = 1$
 - Trajectoire brownienne, $d = 1,5$
 - Courbe de Peano, $d = 2$.

- *Ensembles fractals*

Le modèle d'ensemble fractal de B. Mandelbrot met en jeu la dimension d , notion locale, et aussi **l'auto-homothétie** qui, elle, est une notion globale

Dimension fractale (II)

- *Stéréologie*

La dimension fractale s'étend à \mathbb{R}^n mais n'est pas une notion stéréologique. En pratique, dans le cas isotrope, on passe de \mathbb{R}^2 à \mathbb{R}^3 en rajoutant 1 à d .

- *Expérimentation*

On accède à l'objet via une série de grossissements θ , dont la limite de résolution r va en diminuant. A θ donné, le périmètre apparent de X vaut

$$U_X(r) = [A(X \oplus r B) - A(X \ominus r B)] / 2r = k/2 r^{d-1}.$$

Expérimentalement, il faut donc vérifier si $\text{Log } U_X(r)$, fonction de $\text{Log } r$ s'ajuste à une droite. Auquel cas, la pente de celle-ci estime $d - 1$.

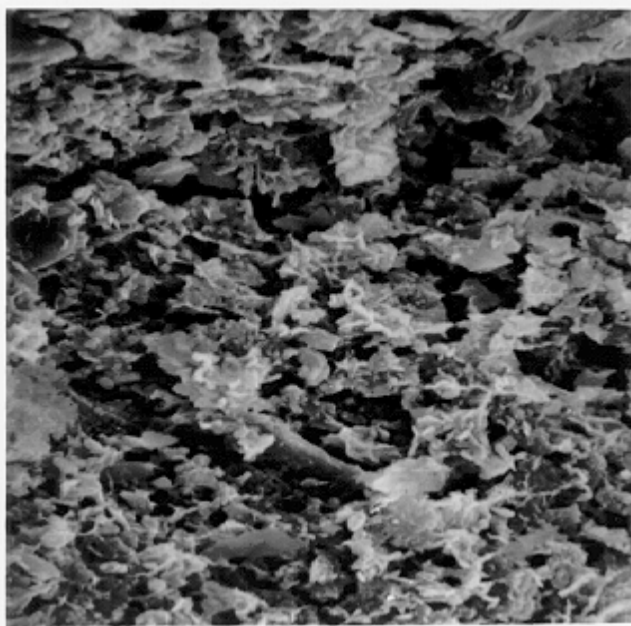
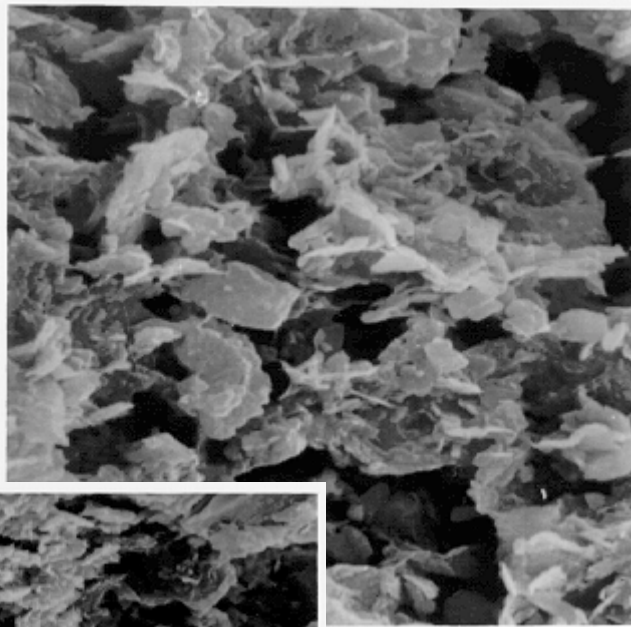
- *Fonction numériques*

Quand l'objet d'étude est une fonction numérique, le raisonnement précédent, appliqué aux sections X_t conduit à l'algorithme

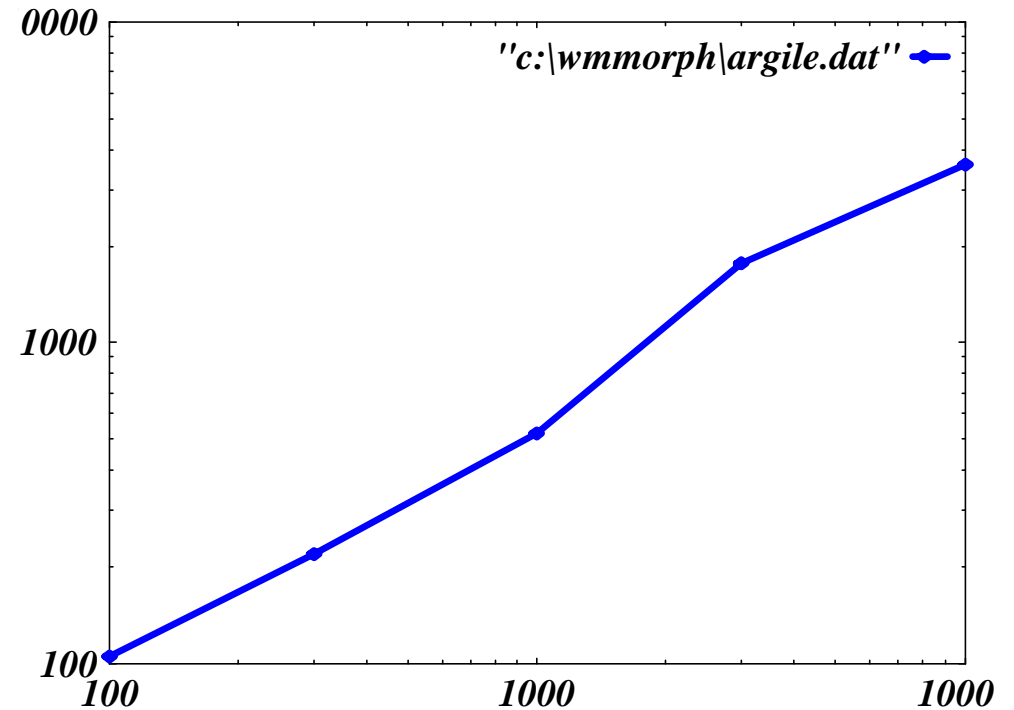
$$\log \text{grad}_r (f) = (d - 1) \log r + k'$$

Dimension fractale : exemple

*Argile :
G×1000*



Argile : G×300



- *Echantillon d'argile vu au microscope electronique à balayage, aux grossissements 10^2 , $3 \cdot 10^2$, 10^3 , $3 \cdot 10^3$ et 10^4 .*
- *L'apparition de détails nouveaux à chaque étape suggère le modèle fractal. De fait, l'augmentation du gradient conduit à $d \simeq 1.8$*

Références de base sur les mesures

Sur la géométrie intégrale et les fonctionnelles de Minkowski

- **H. Minkowski**, *Math. Ann.*, **57** (1903) 447.
- **H. Hadwiger** (1957) *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer Verlag, Berlin.
- **G. Matheron** (1975) *Random Sets and Integral Geometry*, Wiley, N.Y.
- **L.A. Santalo** (1976) *Integral Geometry and Geometrical Probability*, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Addison Wesley, Reading, Mass., USA.

Sur la stéréologie

- **E.E. Underwood** (1970) *Quantitative Stereology*, Addison Wesley.
- **E. R. Weibel** (1981) *Stereological Methods*, Vol 1 and 2, Ac. Press, London.
- **J. Serra** (1982) *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Academic Press, London
- **M. Coster, J.L. Chermant** (1989) *Précis d'Analyse d'Images*, *Les Presses du CNRS (1985)*; 2nd Edition, Les Editions du CNRS.

Sur les ensembles fractals

- **B. Mandelbrot** (1977) *Fractals: form, chance, dimension*. W.H. Freeman San Francisco