

Chapitre V

Connexions ensemblistes

Connexions :

- > **Définition et Propriétés**
- > **connexions dérivées**
- > **Geodésie et ouverture par reconstruction**

Applications :

- > **analyse individuelle**
- > **corrections de bords**
- > **objets isolés**
- > **alignements**

Connexité topologique (*rappel*)

Définition : Etant donné un espace topologique E , l'ensemble $A \subseteq E$ est dit connexe si on ne peut pas le partitionner en deux fermés non vides.

Théorème :

Si $\{A_i\}_{i \in I}$ est une famille d'ensembles connexes, alors

$$\{A_i \neq \emptyset\} \Rightarrow \{\sim A_i \text{ connexe}\} \quad (1)$$

Connexité par arcs (plus pratique quand $E = \mathbb{R}^n$) : A est **connexe par arcs** s'il existe, pour toute paire $a, b \in A$, une application continue ψ telle que

$$[\alpha, \beta] \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f(\alpha) = a ; f(\beta) = b$$

Cette seconde définition est plus restrictive. Cependant, pour les ouverts de \mathbb{R}^n , les deux définitions sont **équivalentes**.

Critique

- *La connexité topologique est-elle adaptée à l'analyse d'image ?*

La connexité par arcs est beaucoup utilisée, et de façon adéquate, dans des notions telles que squelettes, LPE, et transformations homotopiques .

- Toutefois, tous ces algorithmes reposent sur l'intuition suivante:

“ Une particule est quelque chose que l'on peut pointer, et à partir de deux points distincts on extrait soit la même particule, soit deux particules disjointes. ”

Avons nous vraiment besoin de topologie pour formaliser cette intuition ?

- De plus, le fait de sectionner les objets 3-D, ou d'échantillonner les séquences tend à *disconnecter* les objets et aussi les trajectoires .

Est-ce que la connexité topologique permet de maîtriser ces situations ?

Connexion

Ces critiques suggèrent de ne pas prendre (1) comme une conséquence, mais plutôt comme point de départ .

Définition : Soit E un espace arbitraire. Nous appellerons classe connexe, ou **connexion** ϕ toute famille dans $\sigma(E)$ telle que

$$iv) \quad \emptyset \in \phi;$$

$$v) \quad \forall x \in E : \{x\} \in \phi;$$

(*La classe ϕ contient toujours les singletons, plus l'ensemble vide*)

$$vi) \quad \forall \{A_i\}, A_i \in \phi : \{ A_i \neq \emptyset \} \Rightarrow \{ \sim A_i \in \phi \}$$

(*La réunion des éléments de ϕ dont l'intersection n'est pas vide est encore un élément de ϕ)*)

Les éléments de ϕ sont appelés **composantes connexes** .

- En particulier, si E est un espace topologique, les deux connexités **topologique** et **par arcs** sont des connexions.

Ouverture connexe ponctuelle

Chaque connexion se caractérise par les trois propriétés suivantes, qui expriment un **effet de segmentation** :

- **Théorème** : La donnée d'une classe connexe ϕ sur $\sigma(E)$ est équivalente une famille $\{\gamma_x, x \in E\}$ d'ouvertures telles que
 - $\gamma_x(x) = \{x\} \quad x \in E$
 - $\gamma_y(A)$ et $\gamma_z(A) \quad y, z \in E, \quad A \subseteq E$ sont disjoint ou égaux
 - $x \notin A \Rightarrow \gamma_x(A) = \emptyset$

En d'autres termes, chaque ϕ induit une famille **unique** d'ouvertures vérifiant *i*) à *iii*), et les éléments de ϕ sont les invariants des $\{\gamma_x, x \in E\}$.

- Les γ_x se nomment "**ouvertures connexes ponctuelles**", et $\gamma_x(A)$ n'est autre que la composante connexe de A qui contient le point x (ou l'ensemble vide, si $x \notin A$).

Commentaires

- L'axiomatique et le théorème ci-dessus ont été proposés en 1988 par *G.Matheron* et *J.Serra*, qui avaient à l'esprit
 - de rendre leur démarche libre de toute hypothèse topologique inutile ;
 - de formaliser les techniques de *reconstruction* à base de dilatations ;
 - de recouvrir plus de cas que les objets d'un seul tenant ;
 - de conduire à de bons *filtres morphologiques forts*.
- Leur approche était essentiellement ensembliste. Or le véritable champ d'application du filtrage porte sur les images et les séquences numériques, voire colorées. D'où les questions :
 - *Peut-on déduire des ouvertures connexes binaires des filtres pertinent pour les images de gris, ou de couleurs ?*
 - *Avons nous besoin de reconstructions basées sur la dilatation circulaire ?*
 - *Est-il possible de construire des connexion sur les treillis généraux ?*

Exemples de Connexions

- En imagerie digitale, les composantes connexes au sens des 4- et 8-connexités (trame *carrée*), 6-connexité (trame *hexagonale*), 12-connexité (trame *cube-octahédrique*), constituent quatre connexions différentes.
- Les *connexions de seconde génération*
 - par dilatation ou fermeture considèrent les groupes d'objets comme des entités connexes ;
 - mais par ouvertures disjoignent les objets.
- Par ailleurs, la notion s'étend aux fonctions *numériques* et *multi-spectrales*.
- Ainsi, la démarche proposée rassemble en une *axiomatique unique* les diverses acceptions usuelles du concept de connexité, plus de nouvelles.

Connexion seconde par dilatation

Les connexions qui regroupent les objets agissent par l'intermédiaire, soit de dilatations, soit de fermetures (*J. Serra*).

- **Proposition 1** : Soit $\delta : \sigma(E) \rightarrow \sigma(E)$ une dilatation extensive qui préserve la connexion ϕ (i.e. $\delta(\phi) \subseteq \phi$). Alors, l'image inverse $\phi' = \delta^{-1}(\phi)$ de ϕ est à son tour une **connexion** sur $\sigma(E)$, et elle est plus **riche** que ϕ .

[$A' \in \phi' \Leftrightarrow \delta(A') \in \phi$. Les points et \emptyset sont dans ϕ' (préservation par δ). Soient $A'_i \in \phi'$, avec $A'_i \neq \emptyset$. On a $\delta(A'_i) \geq A'_i \neq \emptyset$, et comme $\delta(A'_i) \in \phi$, il vient $\delta(A'_i) = \delta(A'_i) \in \phi$, et donc $A'_i \in \phi'$.]

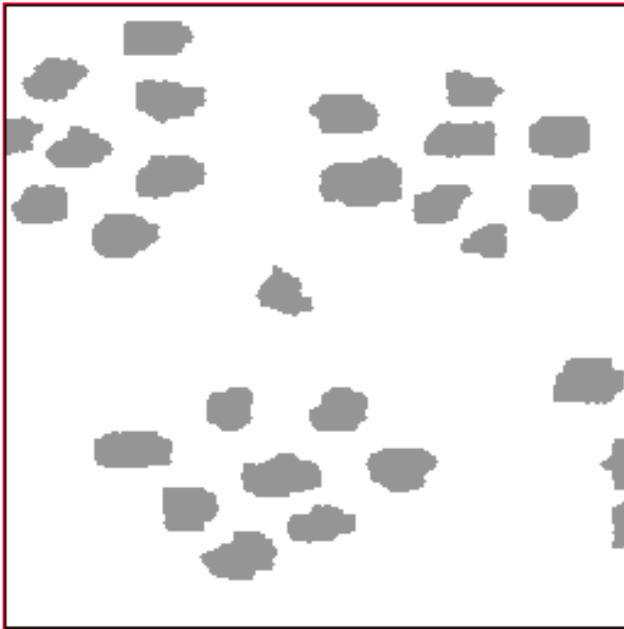
- **Proposition 2** : Les ϕ -composantes de $\delta(A)$, $A \in \sigma(E)$, sont exactement les **images**, selon δ , des ϕ' -composantes de A .

Si γ_x désigne l'ouverture de la connexion ϕ , et v_x celle de ϕ' , il vient:

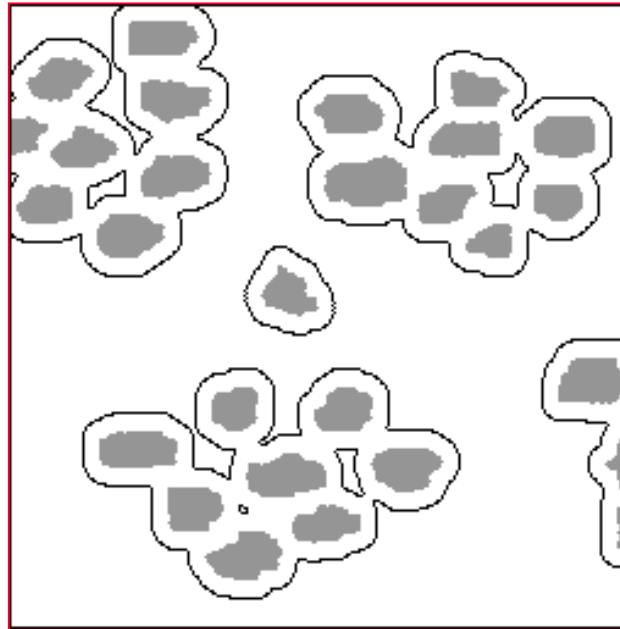
$$\begin{aligned} v_x(A) &= \gamma_x \delta(A) \quad A \quad \text{si } x \subseteq A \quad ; \\ v_x(A) &= \emptyset \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Application : Recherche d'objets Isolés

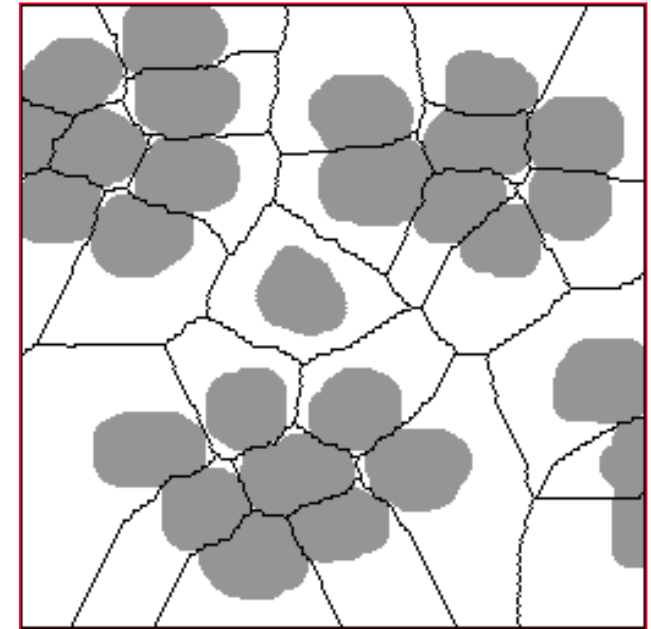
Commentaire: *On veut trouver les particules distantes de plus de 20 pixels des autres. Ces objets isolés ont un dilaté de taille 10 qui ne rencontre pas le SKIZ de l'image initiale.*



a): Image initiale

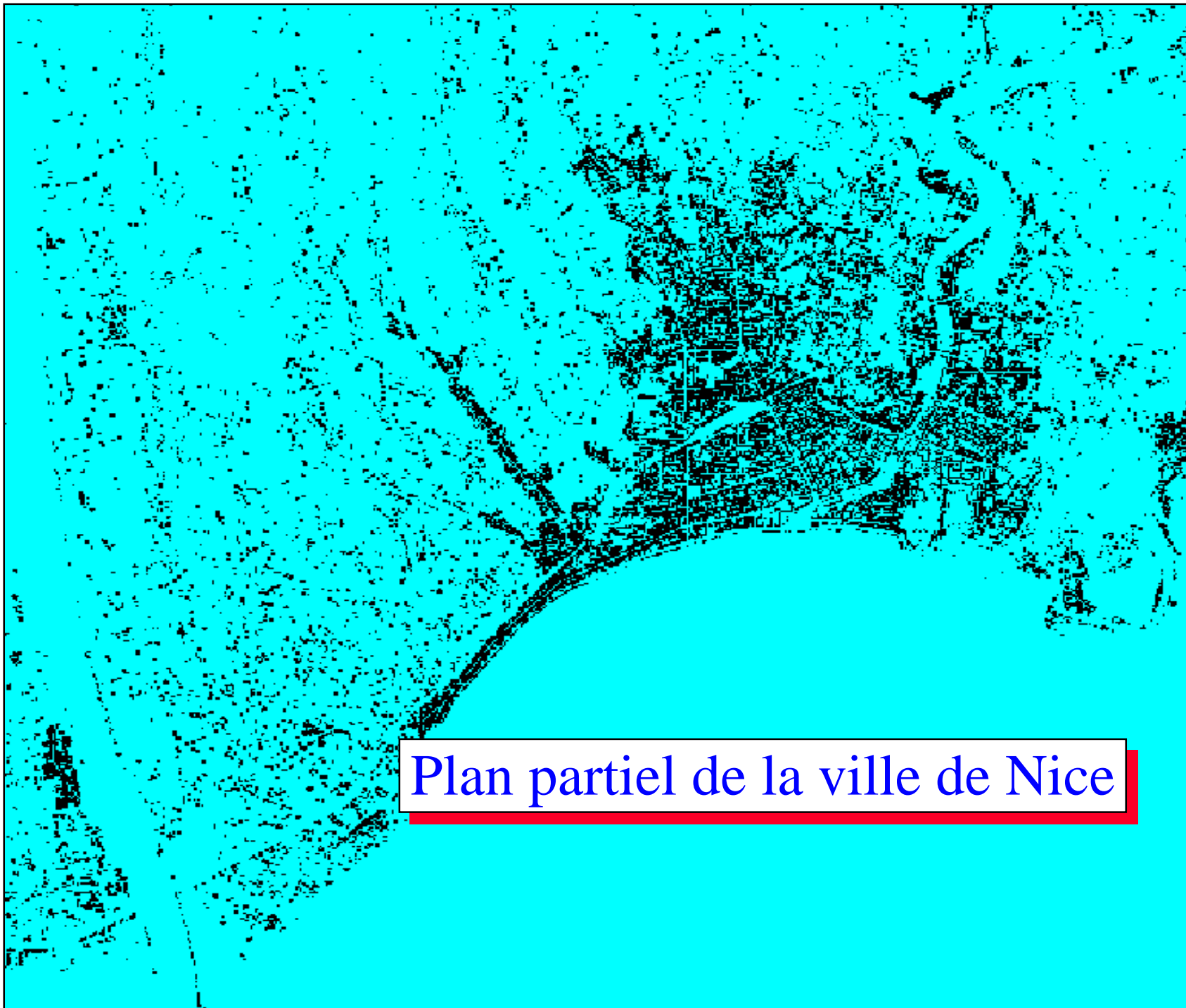


b): dilaté de a) par un disque de rayon 10, et nouvelle connexion



c) : Les particules isolées sont celles qui sont identiques pour les deux connexions.

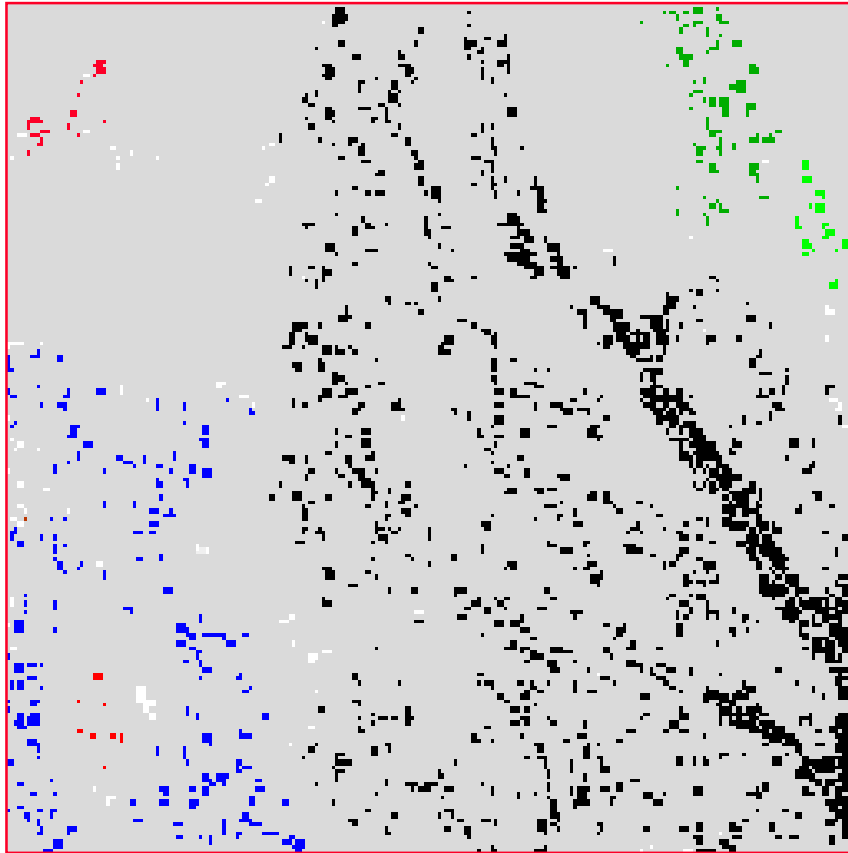
Le SKIZ de a) permet leur extraction.



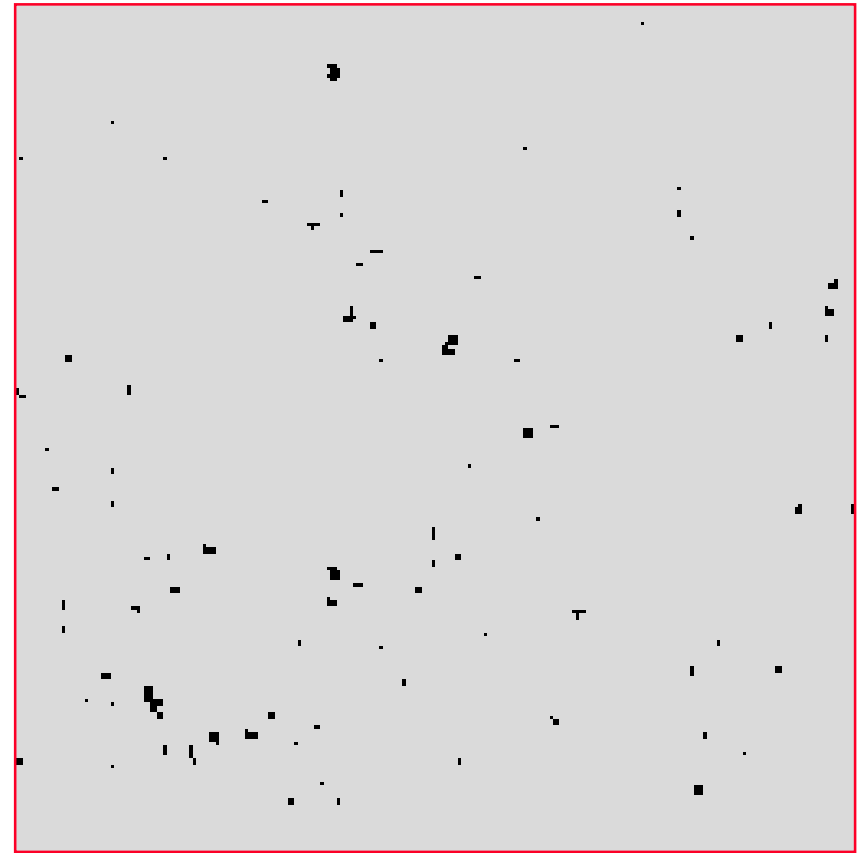
Plan partiel de la ville de Nice

Les Maisons à Grand Jardin

Commentaire : *Détail de la carte précédente, où l'on veut connaître les composantes de la connexité par dilatation, et, parmi elles, celles qui sont aussi connexes par arc .*

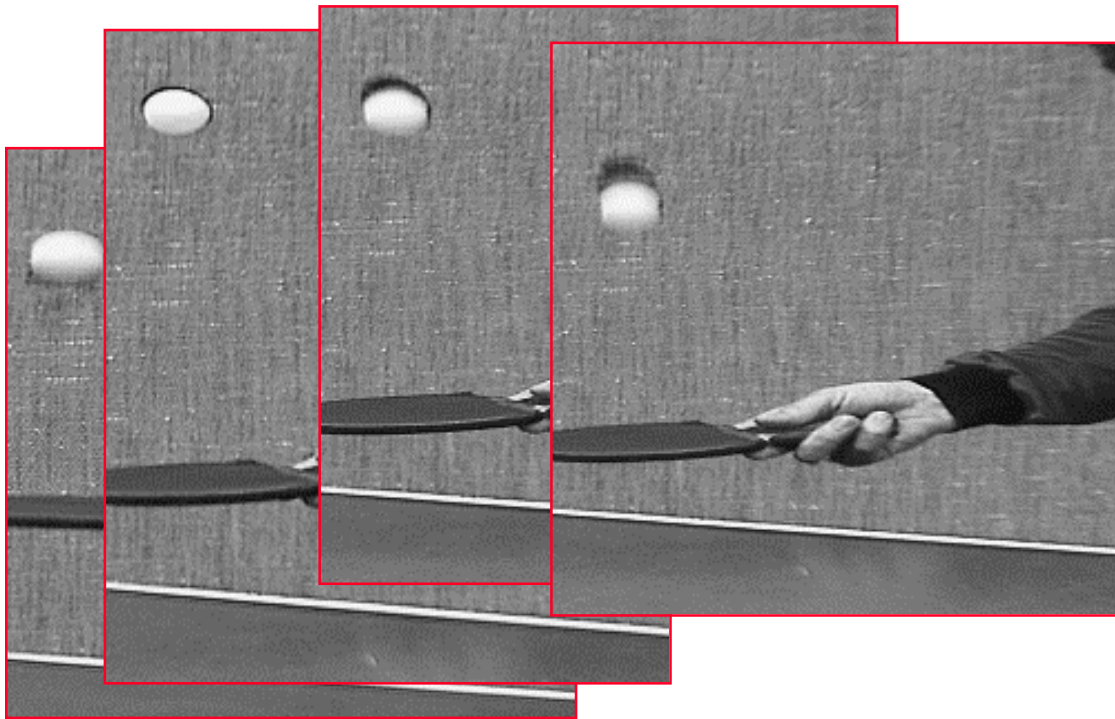


a : Composantes de la connexité par dilatation

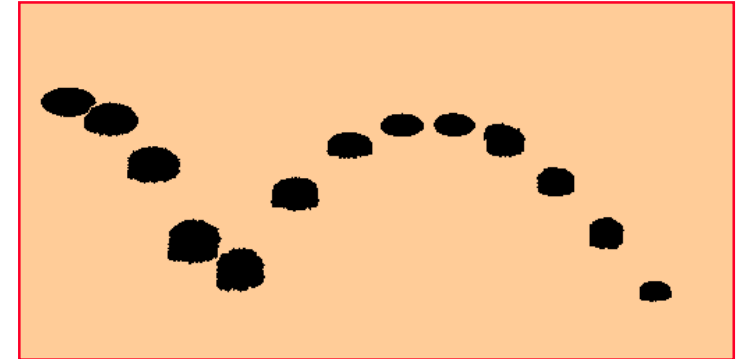


*b : Les composantes isolées de a)
(selon l'algorithme précédent)*

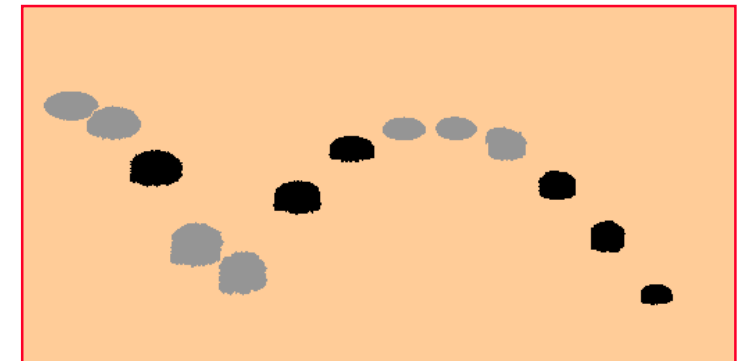
Connexions dans une Séquence



a) partie d'une séquence d'images



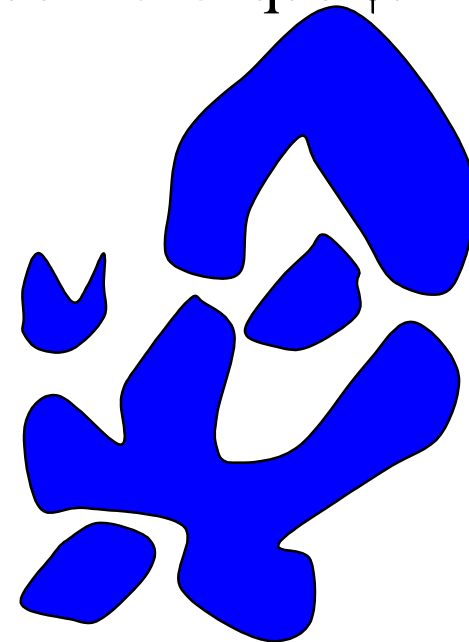
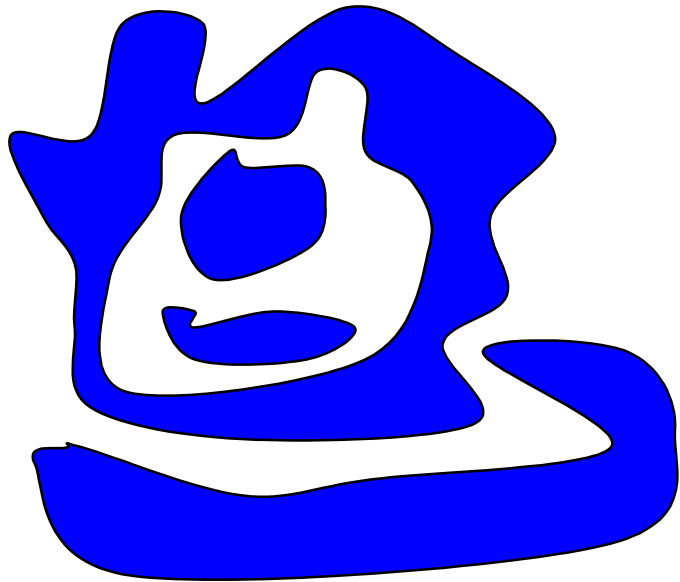
b) représentation de la balle de ping-pong dans le produit Espace \otimes Temps



Connexions obtenues par dilatation de taille 3 dans Espace \otimes Temps (en gris, les regroupements)

Connexion seconde par fermeture

- **Proposition** : Soit $\varphi : \sigma(E) \rightarrow \sigma(E)$ une fermeture qui préserve la connexion ϕ (i.e. $\varphi(\phi) \subseteq \phi$). Alors, l' image inverse ϕ' de ϕ selon φ est à son tour une **connexion** sur $\sigma(E)$, et elle est plus **riche** que ϕ .



Combien de gains y a-t-il pour la connexion par fermeture par :

- bouchage des trous?

- enveloppe convexe ?

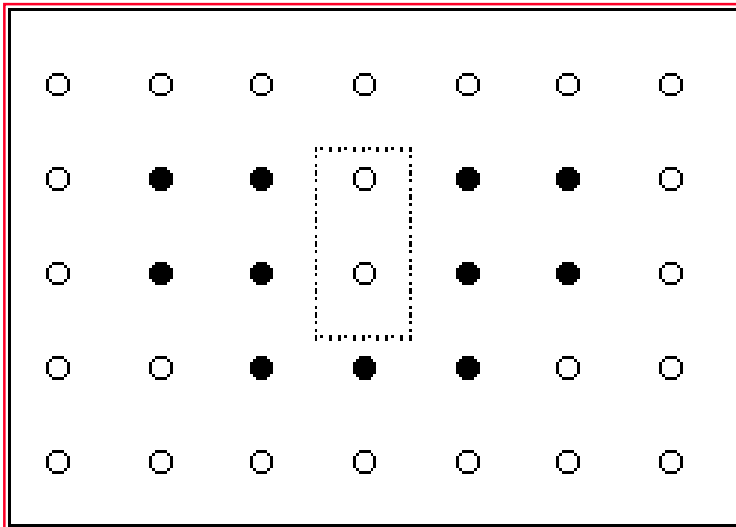
... et pour l' intersection des deux connexions?

Connexion seconde par ouverture

Soit γ une ouverture arbitraire. Les invariants $\{ \gamma(A), A \in \sigma(E) \}$ de γ forment toujours une classe stable pour la réunion. Aussi la famille

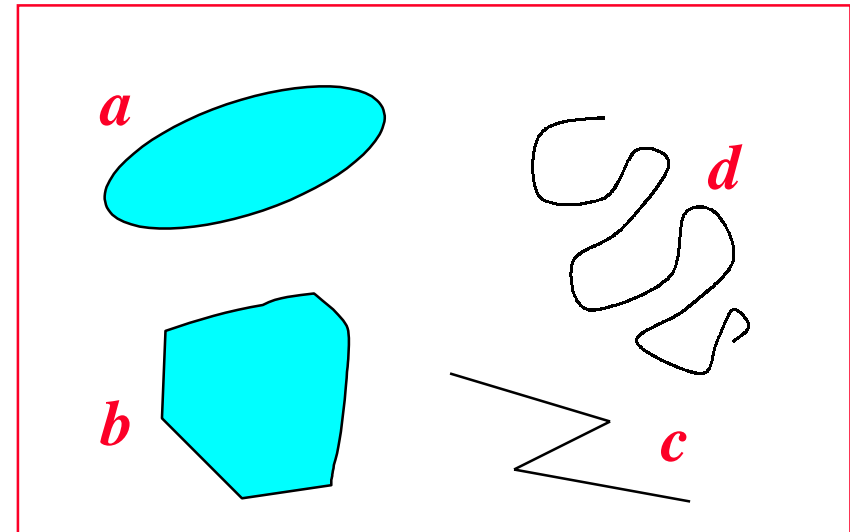
$$\phi = \{ \gamma(A), A \in \sigma(E) \} \sim \{ \{x\}, x \in E \}$$

engendre une connexion (*Ch. Ronse*).



Pour γ ouverture digitale par le carré 2x2, cet ensemble est formé de quatre grains:

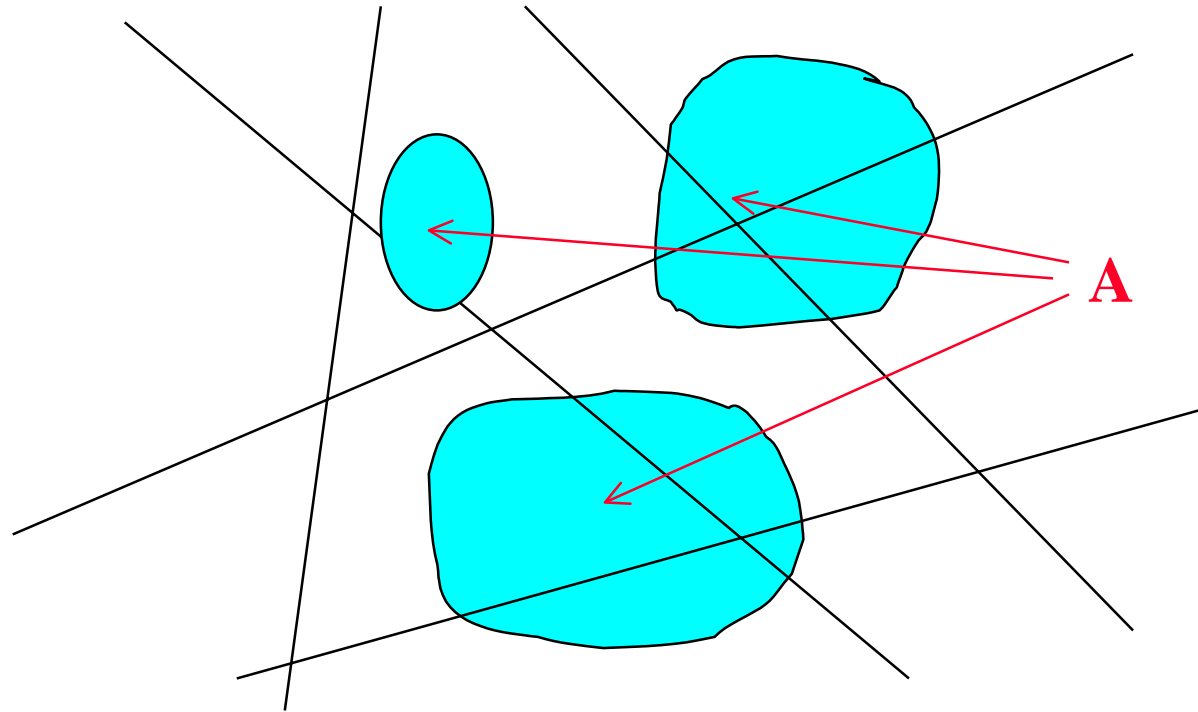
- la réunion des deux carrés,
- et les trois points .



Pour γ la réunion des ouvertures par tous les segments de \mathbb{R}^2 , il vient :

- $a \sim b \sim c =$ un grain
- tous les points de $d =$ grains individuels.

Connexion par partition



- Soit D une partition de l'espace E ; la famille des sous ensembles des classes $\{D(x), x \in E\}$ est stable pour la réunion. Elle engendre donc la connexion (*J.Serra*):

$$\phi = \{ \gamma(A), A \in \sigma(E) \} \sim \{ \{x\}, x \in E \} \sim \perp$$

où la composante connexe $\gamma_x(A)$, $x \in A$, est donnée par l'intersection $A \cap D(x)$ entre A et la classe $D(x)$ de la partition au point x .

Propriétés des connexions

- **Treillis des connexions** : L'ensemble de toutes les connexions sur $\sigma(E)$ est stable pour l'intersection ; il forme un treillis complet dans lequel le supremum de la famille $\{\phi_i; i \in I\}$ est la plus petite connexion contenant $\sim\phi_i$

$$\inf \{\phi_i\} = \phi_i \text{ et } \sup \{\phi_i\} = \phi\{\phi_i\} .$$

- **Partition** : Soit ϕ une connexion sur $\sigma(E)$. Pour chaque $A \in \sigma(E)$ les composantes connexes maximales de A **partitionnent** A en ses propres composantes connexes . Cette partition est croissante, *i.e.* si $A \subseteq A'$, alors toute composante connexe de A est majorée par une autre, de A' .
- **Corollaire** : Si ϕ et ϕ' sont deux connexions sur $\sigma(E)$ avec $\phi \subseteq \phi'$, alors toute ϕ' -composante de A est le supremum de toutes les ϕ -composantes de A qu'elle majore.

Préservation de la connexion

On dit qu'un opérateur ψ sur $\sigma(E)$ **préserve la connexion ϕ** sur $\sigma(E)$ quand ψ applique ϕ dans lui-même, *i.e.* $\psi : \phi \rightarrow \phi$.

Dilatations Connexes : Soit $\delta: \sigma(E) \rightarrow \sigma(E)$ une dilatation extensive. Si $\delta(x)$, $x \in E$, est connexe, alors δ préserve la connexion ϕ .

Opérateurs dérivés : Pour toute dilatation δ sur $\sigma(E)$ qui préserve la connexion ϕ , l'érosion adjointe ε et l'ouverture $\gamma = \delta\varepsilon$ traitent les composantes connexes de tout $A \subseteq E$ indépendamment les unes des autres.

Addition de Minkowski : Soit $E = \mathbb{R}^d$ ou \mathbb{Z}^d , muni de la connexion ϕ . Quand A et X appartiennent à ϕ , la somme $A+X$ est encore ϕ -connexe.

Commentaire : Cette dernière proposition ne suppose pas l'extensivité. Mais la première, qui ne met pas en jeu de translation, recouvre plus de situations, et en particulier les opérateurs standards.

Les Transformations géodésiques

- *Comment implémenter une ouverture connexe ponctuelle ?*

Toutes les connexions que nous avons vues procèdent de la classique connexion par arcs, qu'elles modifient de manière plus ou moins complexe. Or ces dernières peuvent être obtenues au moyen d'*opérateurs géodésiques*.

- *Métriques « géodésiques »*

Dans la distance euclidienne, ou ses versions digitales, on ne tient pas compte des obstacles possibles d'un point à un autre. Par contre, étant donné deux points (a,b) dans un compact $X \subseteq \mathbb{R}^n$, il existe toujours un plus petit chemin de a à b qui soit inclus dans X (G. Choquet).

Cela définit une nouvelle distance, dite *géodésique*, restreinte à la référence X , d'où découle une classe très riche d'opérateurs (Ch. Lantuejoul, S. Beucher). Ces opérations sont toujours *isotropes*, car elles ne mettent en jeu que des boules ou des disques.

Distance géodésique

- **Définition :**

La distance géodésique $d_X: \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, par rapport à l'ensemble de référence X , s'écrit:

- $d_X(x,y) = \text{Inf. de la longueur des chemins, s'il en existe, allant de } x \text{ à } y \text{ en restant inclus dans } X$

- $d_X(x,y) = +\infty$ sinon .

- **Propriétés :**

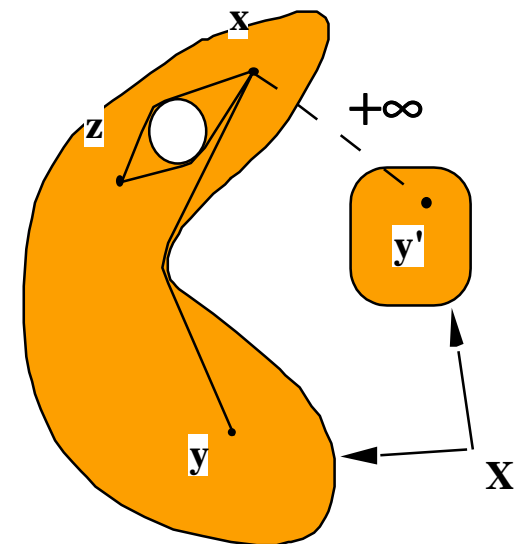
1- d_X est une distance généralisée, *i.e.*:

- $d_X(x,y) = d_X(y,x)$
- $d_X(x,y) = 0 \iff x = y$
- $d_X(x,z) \leq d_X(x,y) + d_X(y,z)$.

2- Distance géodésique \geq distance initiale .

3- Existence, mais pas unicité de géodésiques.

Exemples de géodésiques dans \mathbb{R}^2



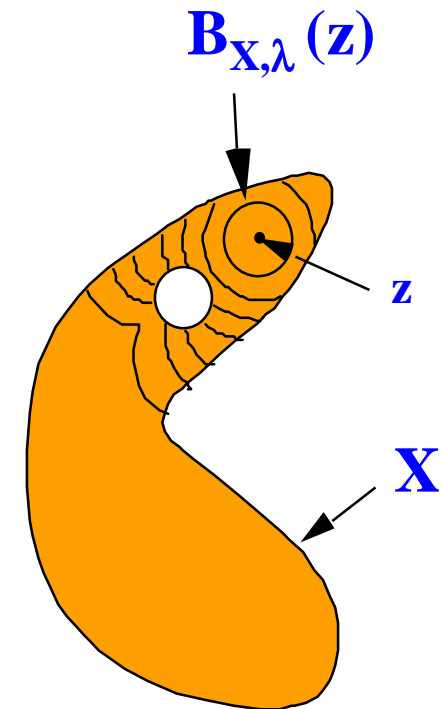
Les portions de géodésiques intérieures à X sont des segments de droites

Boules géodésiques

- On travaille peu avec les chemins géodésiques. Par contre, on utilise souvent le concept de boules géodésiques :

$$B_{X,\lambda}(z) = \{ y, d_X(z,y) \leq \lambda \}$$

- Quand λ augmente, les boules progressent comme le front d'une onde émise depuis z dans l'environnement X .
- Pour une taille donnée λ , les boules B_X peuvent être considérées comme un jeu d'éléments structurants variables d'un point à l'autre.



Boules géodésiques concentriques de centre z

Dilatation Géodésique

- La dilatation géodésique de taille λ de Y dans X s'écrit:

$$\delta_{X,\lambda}(Y) = \sim \{ B_{X,\lambda}(y), y \in Y \}$$

- Quand λ varie, les $\delta_{X,\lambda}$ forment le semi groupe additif :

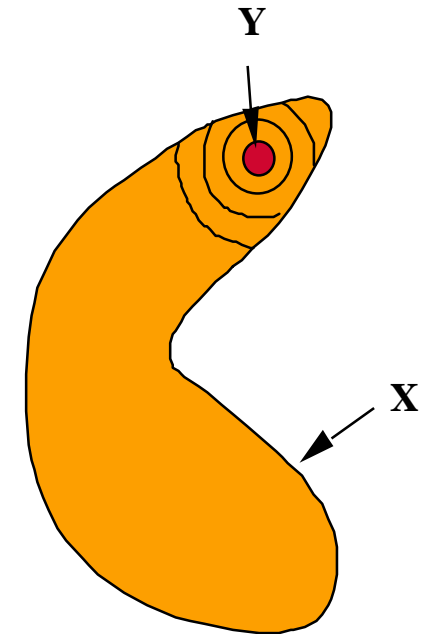
$$\delta_{X,\lambda+\mu} = \delta_{X,\lambda} [\delta_{X,\mu}]$$

(utile pour l'implémentation digitale).

- Il est à noter enfin la différence entre les dilatations *géodésique* ci-dessus et *conditionnelle* :

$$\delta_{X,\lambda}(Y) \subseteq (Y \oplus B_\lambda) \cap X.$$

*dilatations géodésiques
de Y dans X .*



Erosion géodésique

- Toute boule étant symétrique, les dualités par adjonction et pour le complément sont les mêmes.
- Mais il faut compléter **dans l'ensemble de référence X** (i.e. $X \setminus Y = X \cap Y^c$), ce qui donne :

$$\varepsilon_X(Y) = X \setminus \delta_X(X \setminus Y)$$

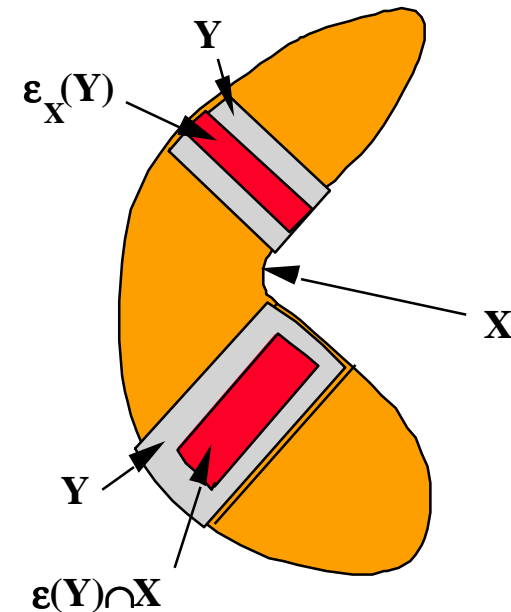
Ou encore, en digital, pour $\lambda = 1$

$$\varepsilon_X(Y) = \varepsilon(Y \cup X^c) \cap X$$

où ε désigne l'érosion isotrope de taille 1.

On notera que ce résultat diffère de $\varepsilon(Y) \cap X$

érosion géodésique



Dilatation géodésique digitale (binaire)

- Pour les métriques *digitales* sur Z^n l'ensemble $\delta(x)$ représente la boule unité centrée au point x , la dilatation géodésique unitaire est définie par:

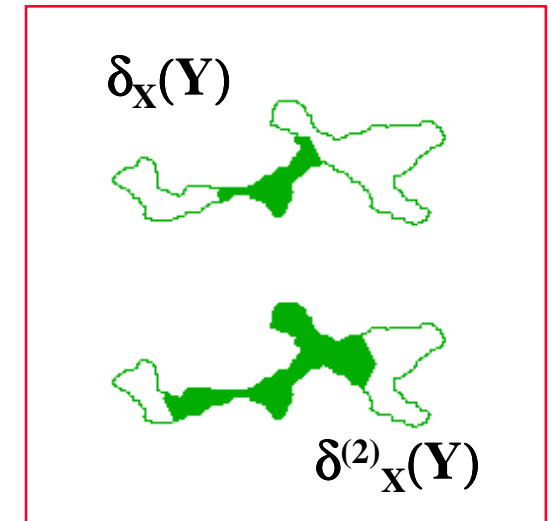
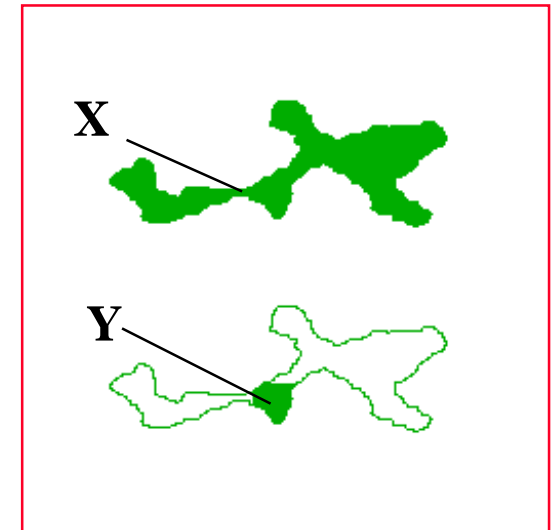
$$\delta_x(Y) = \delta(Y) \cap X$$

- La dilatation de taille n se construit alors par *itération* :

$$\delta_{X,n}(Y) = \delta^{(n)}_X(Y) \text{ , avec}$$

$$\delta^{(n)}_X(Y) = \delta(\dots \delta(\delta(Y) \cap X) \cap X \dots) \cap X$$

- On notera que les dilatations géodésiques ne sont pas invariantes par translation .



Ouverture par reconstruction

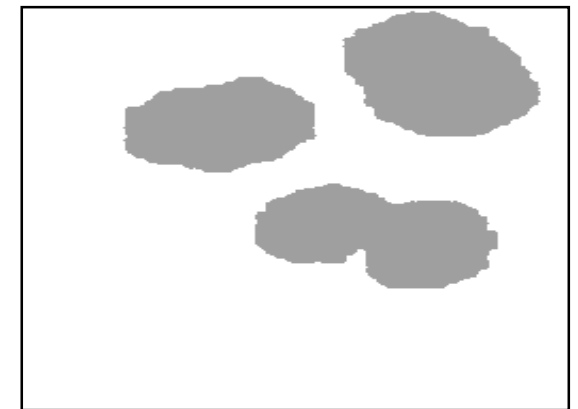
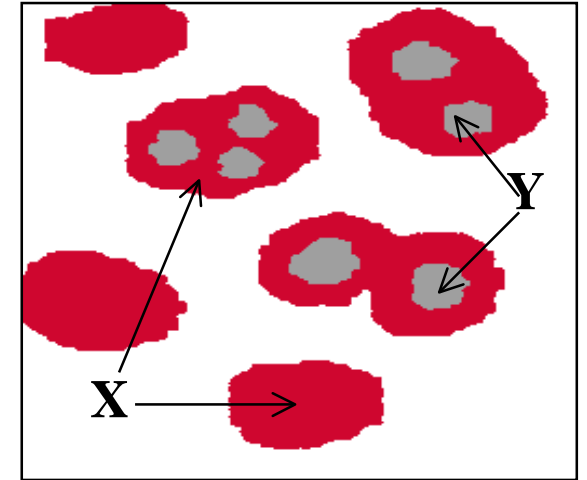
- Pour un X donné, la dilatation infinie de Y

$$\delta_{X,\infty}(Y) = \cup \{ \delta_{X,\lambda}(Y), \lambda > 0 \}$$

est une *fermeture* ; mais si nous la considérons comme une opération sur l'ensemble de référence X (rendu variable), pour un marqueur *donné* Y , alors $\delta_{X,\infty}(Y)$ devient l'*ouverture*

$$\gamma^{\text{rec}}(X; Y) = \sim \{ \delta_{X,\lambda}(Y), \lambda > 0 \} = \sim \{ \gamma_y(X), y \in Y \}$$

par reconstruction des composantes connexes de X qui contiennent au moins un point de l'ensemble Y .



N.B.: *Quand le pas de la grille devient de plus en plus fin, la reconstruction digitale tend vers l'eulidienne ssi X est réunion localement finie de compacts disjoints.*

Connexion et Ouverture par Reconstruction

La notion de connexion permet d'exprimer puis de généraliser l'ouverture par reconstruction de la manière suivante:

1) Appelons *critère binaire croissant* toute application $c: \sigma(E) \rightarrow \{0,1\}$ telle que:

$$A \subseteq B \Rightarrow c(A) \leq c(B)$$

2) A chaque critère croissant c associons *l'ouverture triviale* γ_T

$$\begin{aligned} \gamma_T(A) &= A & \text{si } c(A) &= 1 \\ \gamma_T(A) &= \emptyset & \text{si } c(A) &= 0 \end{aligned} \quad A \in \sigma(E)$$

3) Généralisant la définition du cas géodésique, nous dirons que γ^{rec} est *l'ouverture par reconstruction* relative au critère c quand:

$$\gamma^{\text{rec}} = \{ \gamma_T \gamma_x, x \in E \}$$

γ^{rec} agit indépendamment sur les diverses composantes connexes, les gardant ou les éliminant selon qu'elles vérifient le critère, ou non. (e.g. *marqueur*, mais critère de *surface*, ou de *diamètre de Ferret*).

Fermeture par Reconstruction; Treillis

- **La fermeture par reconstruction** $\varphi^{\text{rec}} = \infty \gamma^{\text{rec}} \infty$ se définit par dualité.

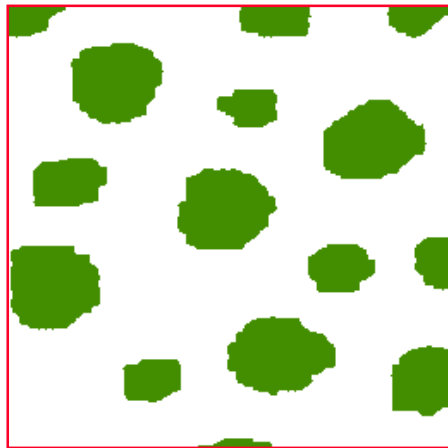
Par exemple, dans \mathbb{R}^2 ,

- pour le critère « **avoir une surface 810** », $\varphi^{\text{rec}}(A)$ est la réunion de A et des pores de surface 710;
- pour le critère « **rencontrer le marqueur M** », $\varphi^{\text{rec}}(A)$ est la réunion de A et des pores inclus dans M^c .

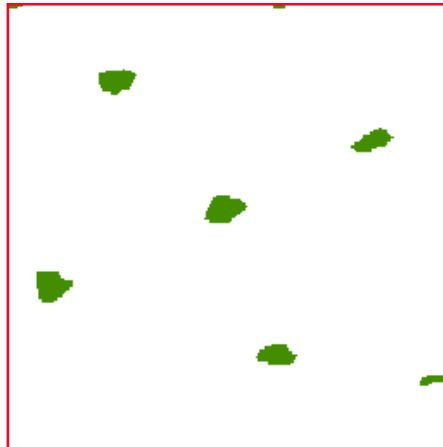
- **Treillis associés:** Considérons maintenant une famille $\{\gamma_i^{\text{rec}}\}$ d'ouvertures par reconstruction, de critères $\{c_i\}$. Leur inf γ_i^{rec} est encore une ouverture par reconstruction, où chaque grain de A doit remplir tous les critères c_i pour être retenu, et le sup $\sim \gamma_i^{\text{rec}}$ est l'ouverture où un critère au moins doit être satisfait. D'où la:
- **Proposition:** les ouvertures et les fermetures par reconstruction forment deux treillis complets pour le sup et l'inf usuels.

Filtrage par Erosion-Reconstruction

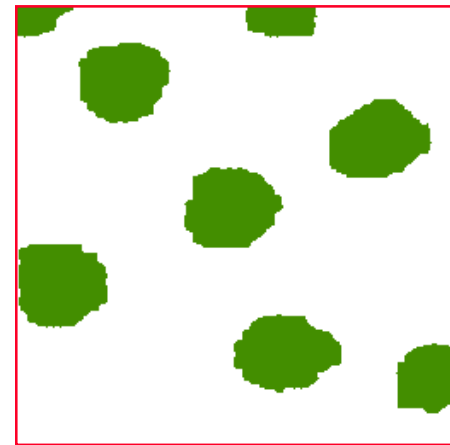
- L' érosion X, B_λ supprime les composantes connexes de X qui ne peuvent pas contenir un disque de rayon λ .
- L'ouverture $\gamma^{\text{rec}}(X ; Y)$ de marqueur $Y = X, B_\lambda$ reconstitue ensuite toutes les autres.



a) image initiale



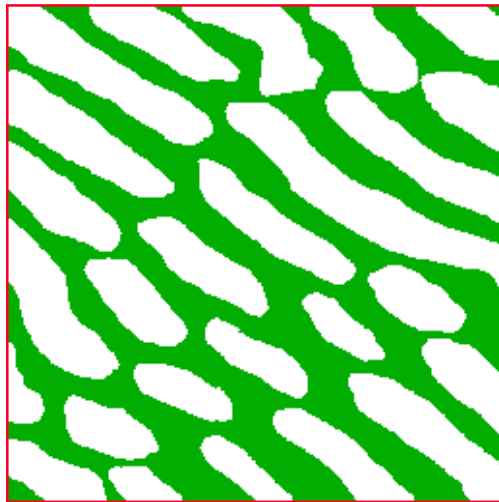
*b) érodé de a)
par un disque*



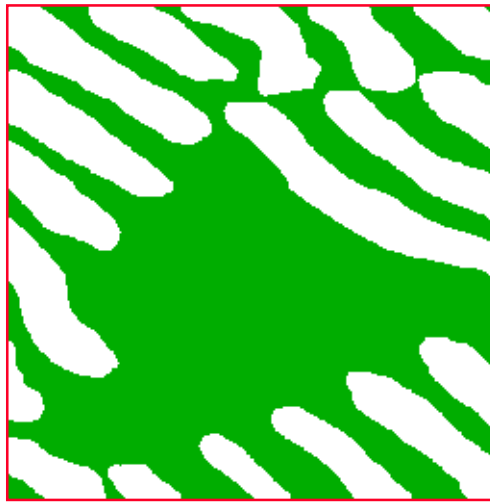
*c) reconstruction
de b) dans a)*

Elimination des grains touchant les bords

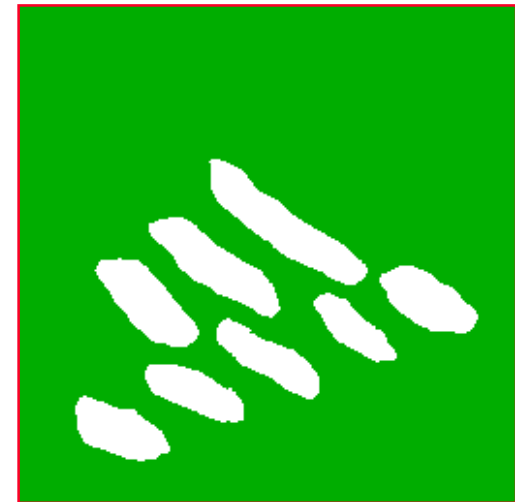
- Soit Z l'ensemble des bords du champ, et X les grains à étudier.
- On reconstruit $Z \cap X$ dans X ;
- et on prend la différence ensembliste entre X et la reconstruction.



a) image initiale



*b) grains touchant
les bords*



c) résidu : a) - b)

Bouchage des trous

N.B. : Algorithme rapide et efficace sauf pour les trous qui coupent les bords du champ.

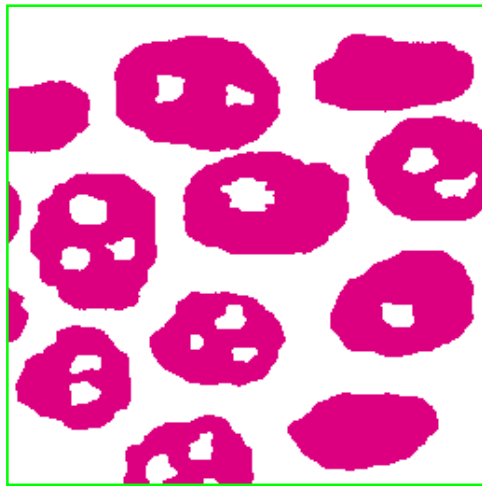
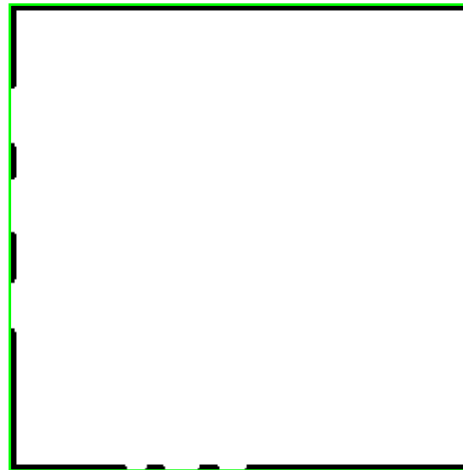
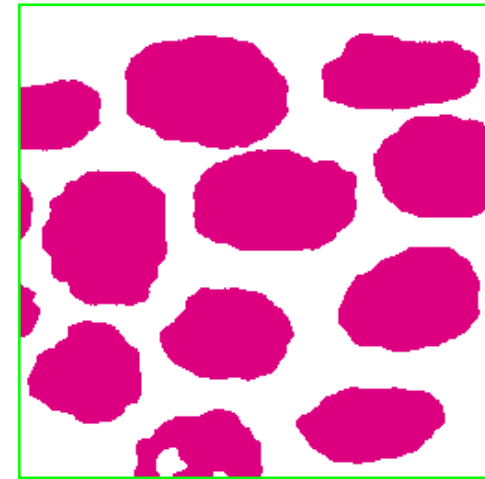


image initiale
 X



A = bords du champ
rencontrant X^C



reconstruction
de A dans X^C

Analyse individuelle de particules

Algorithme (J.C. Klein)

Tant que X n' est pas vide,
faire

{

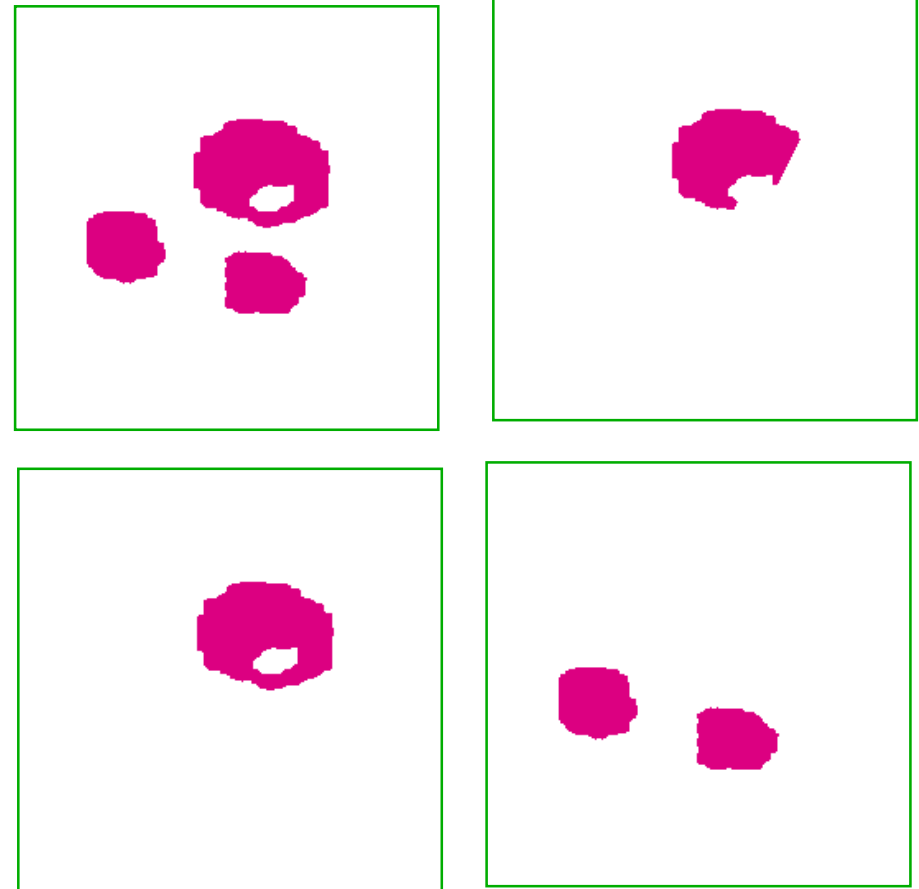
~ $p :=$ premier point rencontré
lors d' un balayage vidéo;

~ $Y :=$ composante connexe de
 X reconstruite à partir de p ;

~ Traitement de Y (mesures
diverses) ;

~ $X := X \setminus Y$

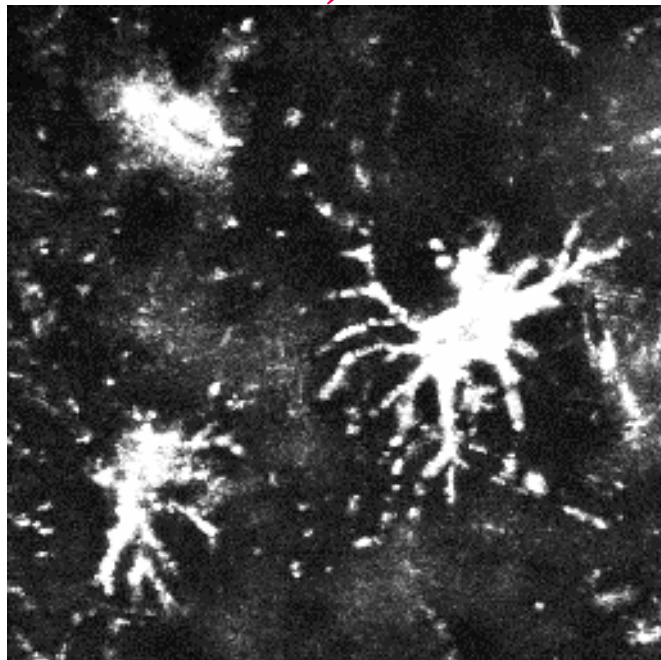
}



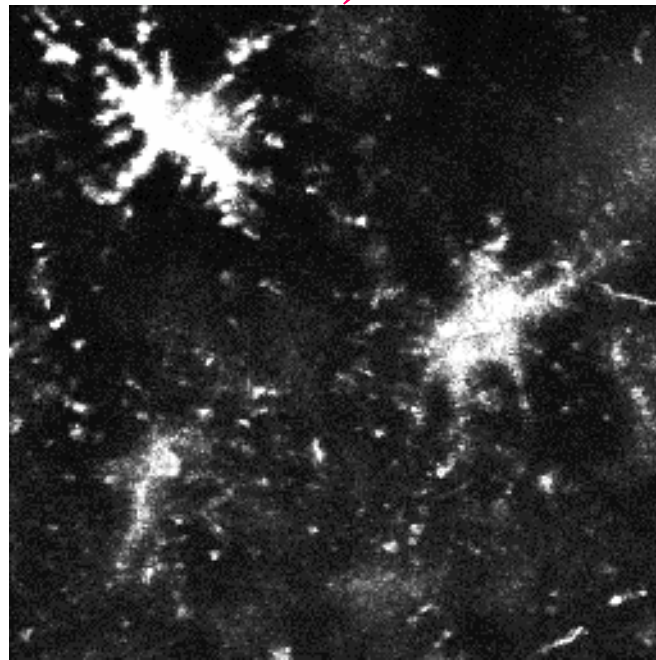
Extraction individuelle de particules

Application : extraction d 'objets 3-D (I)

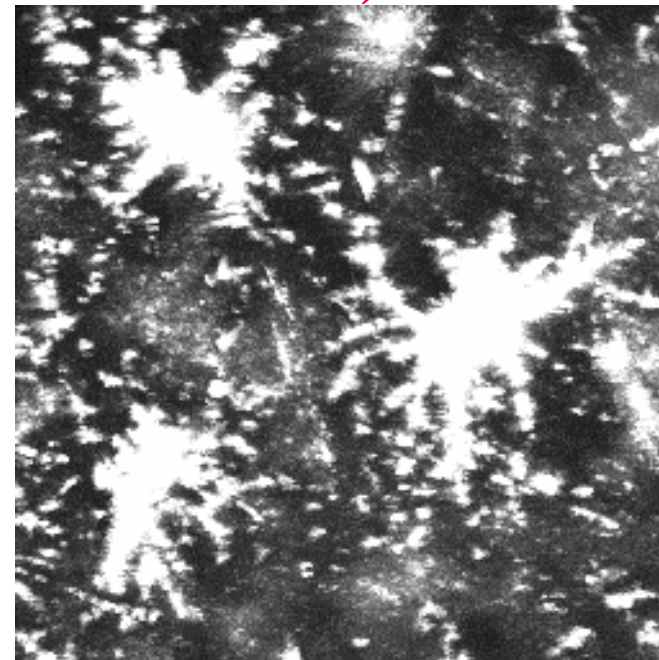
a)



b)



c)

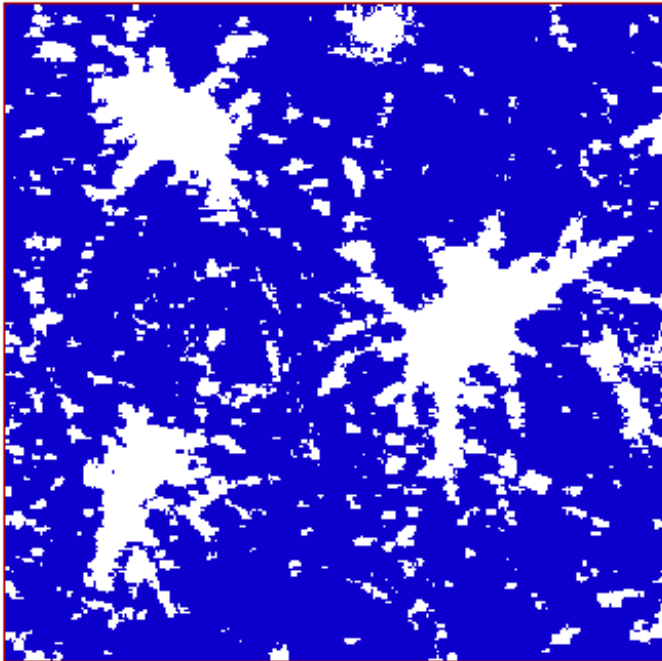


But: extraire les ostéocytes présents dans une séquence de 60 sections, en microscopie confocale

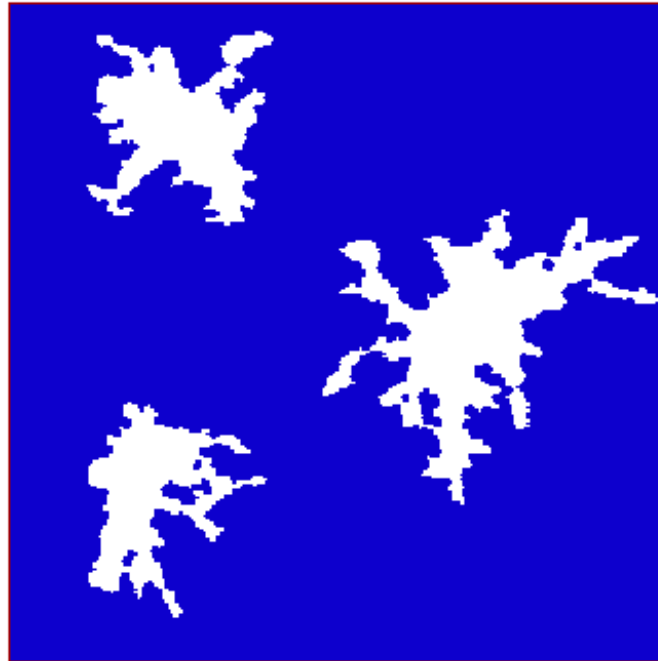
- *Clichés a) et b) : sections 15 et 35 ;*
- *Image c) : supremum M des 60 sections.*

Application : extraction d 'objets 3-D (II)

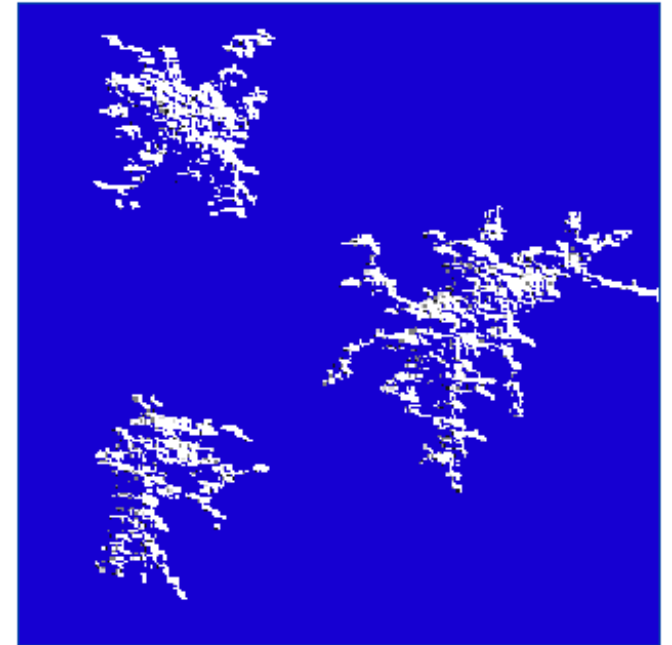
d)



e)



f)



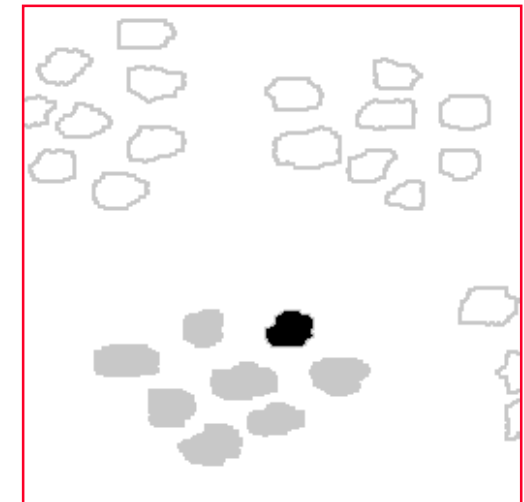
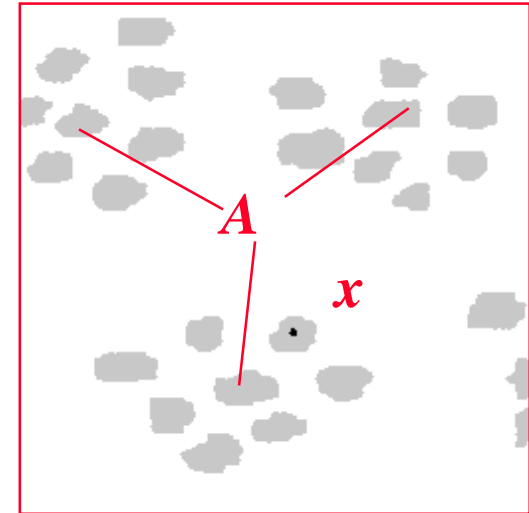
- *d) : seuil de c) au niveau 60 ; e) : ouverture connexe de d)*
- *f): dilatation géodésique infinie de la séquence seuillée au niveau 200 , par rapport au masque e) (visualisation en perspective).*

Connexité et Reconstructions

- Nous avons vu que si le point x est un marqueur et A un ensemble, la dilatation géodésique infinie $\cup \delta_A^{(n)}(x)$ fournit l'ouverture connexe ponctuelle de A en x , *i.e.*

$$\gamma_x(A) = \cup \delta_A^{(n)}(x) \quad (1)$$

- De plus si nous remplaçons le disque unité δ par celui de rayon 10, par exemple, dans l'Eq. (1) ? Nous obtenons une seconde connexion.
- D'où deux questions :
 - 1- Est-il nécessaire d'opérer par des dilatations selon des *disques* ?
 - 2- et même par des *dilatations* ?



Géodésie et Connexions

Curieusement, la réponse à ces questions dépend de propriétés de symétrie des opérateurs. Une application $\psi : \sigma(E) \rightarrow \sigma(E)$ est *symétrique* quand

$$x \in \psi(y) \iff y \in \psi(x)$$

pour tous les points x, y de E .

- *Proposition (Ch. Ronse, J.Serra)* : Soit $\delta: \sigma(E) \rightarrow \sigma(E)$ une dilatation extensive et symétrique, et soient $x \in E$ et $A \in \sigma(E)$. Alors l'itérée limite

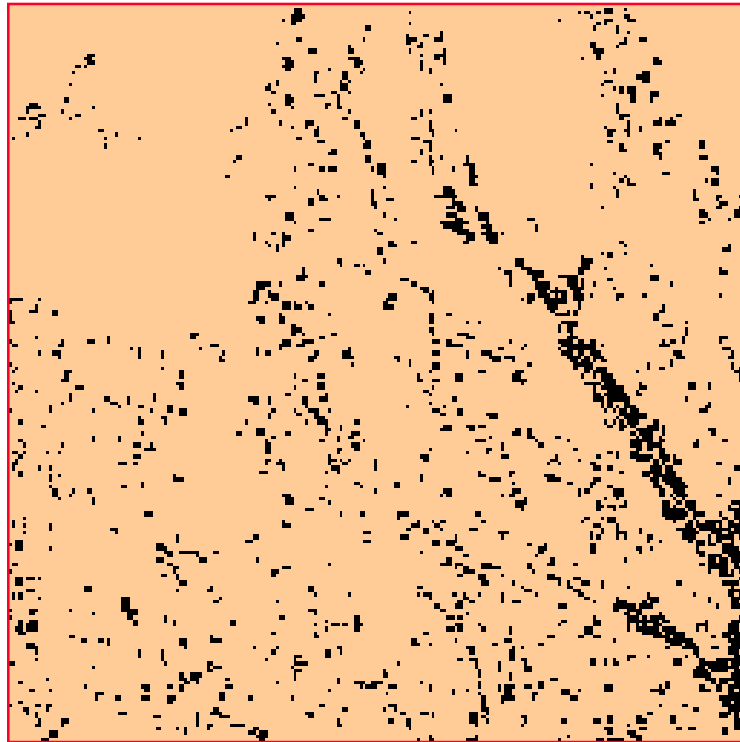
$$\gamma_x(A) = \bigcap_{n > 0} \{ \delta_A^{(n)}(x) \}$$

vue comme une opération sur A , est une *ouverture connexe ponctuelle*.

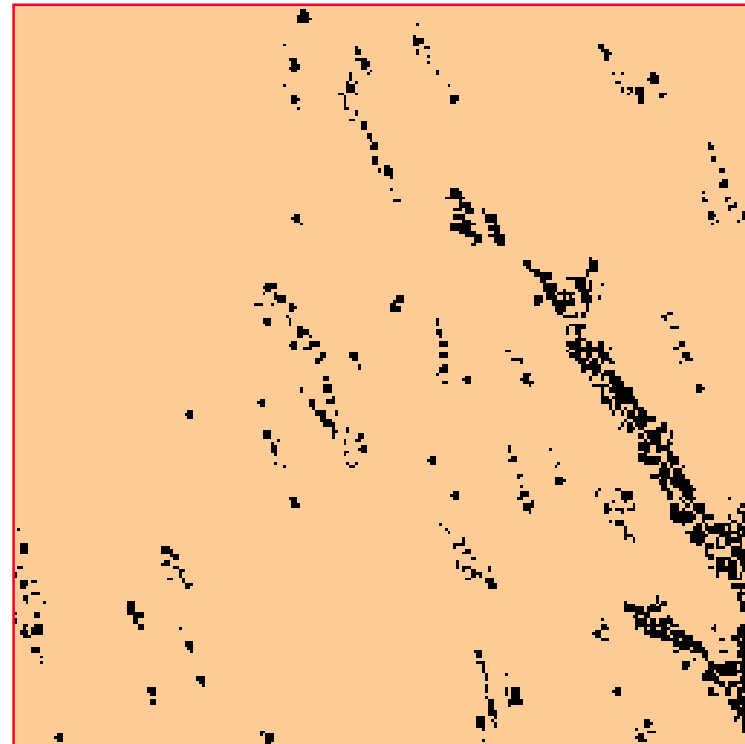
(On notera que δ lui-même n'a pas besoin d'être connexe !)

Nice : Alignements directionnels

Commentaire : *Bien que l'élément D de la reconstruction ne soit pas connexe, il engendre une connexion nouvelle, dont on a filtré les particules les plus grosses.*



a) Zone d'étude A



b) Reconstruction de A à partir de A, 2B en utilisant l'élément $D = \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}$ où chaque point indique un hexagone unité

Références

Sur la géodésie binaire :

Les premiers algorithmes géodésiques portent sur l'analyse individuelle {KLE76}. La théorie de la géodésie est due à S.Beucher et Ch. Lantuejoul {LAN81}. Certains compléments ont été proposés par M.Schmitt {SCH89}.

Sur les connexions binaires :

La connexité morphologique pour les ensembles fut introduite par J.Serra and G.Matheron en liaison avec les filtres forts {SER88,ch7}. L'ouverture connexe ponctuelle et les connexions de seconde génération apparaissent aussi pour la première fois dans {SER88,ch2}. Dans {RON98}, Ch.Ronse définit une axiomatique équivalente, mais prise d'un autre point de vue, et l'illustre de divers exemples. Une variante plus spécifique a été proposée par R.M. Haralick et L.G. Shapiro {HAR92}. Les résultats sur les connexions de seconde génération et sur les treillis de connexions sont de J. Serra {SER98a et b}.