Descriptions morphologiques par fronts d'onde tridimensionnels

Jean Serra

mai 2000

Abstract

L'étude présentée porte sur l'analyse d'objets binaires tridimensionnels, dont la structure n'est ni évidente, ni généralement très visible. Trois exemples de microscopie en biologie illustrent la démarche. Dans le premier, un rein d'embryon de rat, le tissu se développe comme un arbre, où l'on cherche à repérer les branchements, les extrémités, et leur disposition spatiale. Le front d'onde permet de donner une définition précise des notions de branche et d'extrémité, et conduit à des algorithmes manipulables.Le second exemple porte sur la croissance embryonnaire du tibia de poulet. La partie centrale de l'os ou diaphyse se structure en cylindres emboîtés de même axe, et reliés par des ponts plus ou moins allongés. Par front d'onde, on parvient à séparer les cylindres et à extraire, puis dénombrer, les ponts qui les relient.

L'exposé se termine sur quelques résultats plus formels, exprimant les liens entre géodésie, métrique et connexité et illustrés par l'extractions d'ostéocytes par front d'onde directionnel.

Mots clés: Morphologie mathématique, géodésie, tridimensionnel, dilatation, métrique, connexion, rein, embryologie, Euler-Poincaré.

1 Contexte expérimental : microscopie tridimensionnelle

La démarche proposée ici est née de l'expérience, et plus précisément de deux problèmes relevant de la microscopie optique tri-dimensionnelle qui m'ont été posés cette année-ci, indépendamment l'un de l'autre.

1.1 1ère question : le rein

En février dernier, le Dr. John BERTRAM[1], néphrologue et Président en exercice de la Société Internationale de Stéréologie, a passé deux jours au CMM,

[1] Dpt of Anatomy, faculty of Medecine, Univ. de Melbourne, Parleville, Victoria 3052, Australia

où il a présenté ses travaux en cours. Il étudie le développement embryonnaire du rein sur des modèles animaux tels que le rat, en exploitant la propriété des reins embryonnaires d'arriver à se développer in vitro. Cet avantage lui permet de suivre l'évolution de l'organe par microscopie confocale, et donc sans avoir à détruire l'animal[1].

Le Dr. Bertram se proposait de prendre un stagiaire de l'Ecole des Mines, à condition que ses données soient quantitativement exploitables, et demandait en particulier notre avis sur deux séries de coupes digitalisées. Une pré-étude menée pendant son séjour a donné bon espoir et montre que l'on peut binariser et suivre l'arbre de coupe en coupe sur chacune des deux séries. D'où la décision d'ouvrir un stage, qui est actuellement en cours [3] (Gabriel FRICOUT, 3ème année, 2000/2001).

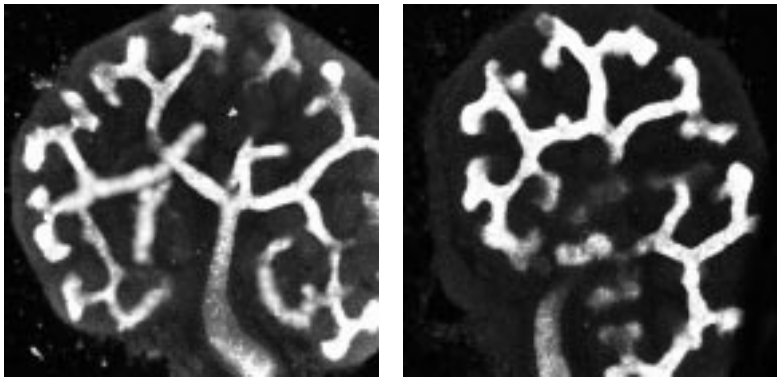

Figure 1 a) rein étudié (supremum des coupes) ; b) autre specimen

On constate (figure 1) que la structure se développe comme un arbre à partir de son point d'ancrage. La description demandée à la morphologie va bien au delà de la pré-étude initiale. Elle concerne la géométrie de cet arbre, et porte sur les deux thèmes :

- des extrémités : où sont-elles ? comment se disposent-elles dans l'espace ?
- des branches : où sont-elles ? selon quelle hiérarchie et quelles longueurs ?

La technologie de la microscopie confocale conduit à grande anisotropie de l'échantillonnage. Chaque série comprend 29 coupes de 30 μ d'épaisseur ; elles sont orientées, grosso modo, de façon perpendiculaire au tronc de l'arbre.

Dans chaque coupe, les pixels sont disposés en trame carrée d'espacement quatre microns environ. L'élément de volume digital (le voxel) apparaît donc comme un cylindre à base carrée sept fois plus haut que large. Indiquons enfin que chaque extrémité de branche est entourée de néphrons, dont le nombre total informe sur la future capacité du rein adulte. Ces néphrons, non visibles ici, pourront l'être au moyen d'une double coloration. Se posera alors le problème des liens entre la forme de l'arbre et le nombre des néphrons qu'il est susceptible d'accueillir.

1.2 2ème question : le tibia

Le Dr. Staub[2] et l'ingénieur M. Mendjeli[2] étudient la morphogénèse des os longs, et travaillent sur le tibia d'embryons de poulet. Le Dr. Staub a construit un modèle dynamique de la zone centrale allongée (la diaphyse), où le futur os compact se présente comme l'emboîtement de plusieurs cylindres co-axiaux [13](cf fig. 2).

L'expérimentation menée par M. Mendjeli a consisté à découper une diaphyse de tibia, perpendiculairement à son axe, en une série d'une centaine de coupes semi-fines. Il les a ensuite recalées les unes par rapport aux autres, de manière informatique. Au terme de ce traitement, on dispose d'une matrice de données en grille cubique à peu près isotrope, dont le pas est de l'ordre du micron et la taille de l'ordre de 300 x 300 x 100.

A la différence de l'exemple précédent, la première difficulté ici est d'arriver à voir l'objet d'étude. Les cylindres emboîtés ne sont pas directement perceptibles, et l'on n'a aucune idée des lacunes ou des trous qu'ils peuvent présenter. En revanche, l'image de l'os est pratiquement binaire. Enfin, comme dans l'exemple précédent, l'espace est "orienté" à partir d'un marqueur : ici l'espace médulaire central ; là, la zone de contact entre le rein et la gélatine (pied de l'arbre).

Peut-on segmenter l'os en ses cylindres concentriques, et décrire ces derniers quantitativement (épaisseur, porosité, contacts entre cylindres, etc ...)?

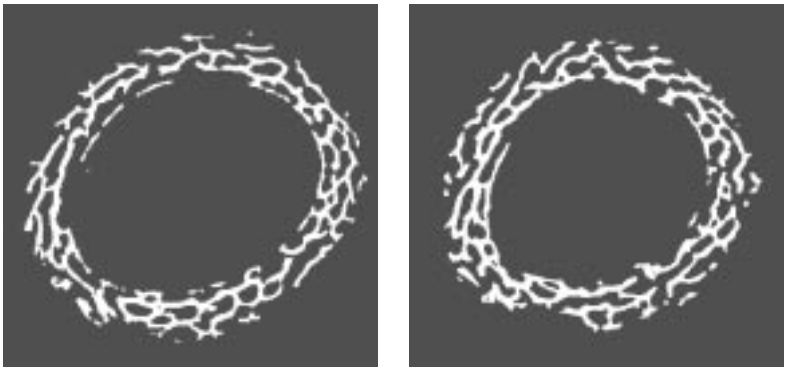

Figure 2 : Deux section horizontales d'épiphyse de tibia

2 Méthode : fronts d'onde

2.1 Théorème de G. Choquet

Lorsqu'on provoque un ébranlement en jetant un caillou dans un lac, un chapelet d'ondes se déploie et progresse, en contournant les obstacles éventuels, jusqu'aux points les plus éloignés du milieu. Le front d'onde, circulaire en l'absence de

[2] Laboratoire de recherches orthopédiques - CHU Lariboisière - St Louis - 75010 Paris

bords, lèche sinon les contours des îles et du lac pour finir par le parcourir complètement (cf fig. 3).

Figure 3 : géodésique 2D dans l'espace euclidien

C'est pour extraire des objets connexes pointés par des marqueurs que F. Meyer[8] et J.C. Klein [5] ont les premiers transposé ces notions au cadre de la morphologie mathématique, et la première formalisation, sous le nom de "métrique géodésique" fut établie par C. Lantuejoul et S. Beucher [6]. De fait, dans la figure 3, la zone de l'ensemble de référence Z balayée entre les instants 0 et λ par le front d'onde issu du point x à l'instant origine est un disque $B_\lambda(x)$, plus petit que le disque euclidien de rayon λ et entièrement contenu dans Z. L'usage que l'on peut faire de la métrique $\{B_\lambda(x), x \in Z\}$ repose sur le théorème suivant de G. Choquet ([2],théorème 11-6)

Theorem 1 *Soit E un espace métrique compact et soient A et B deux parties fermées disjointes de E. S'il existe des courbes rectifiables d'extrémités dans A et B respectivement, et si λ désigne la borne inférieure de leurs longueurs, alors il existe un arc simple de longueur λ et d'extrémités dans A et B respectivement.*

Dans ce qui suit, nous supposerons toujours que les références Z sont compactes, et que pour tous points x, y pris dans une même composante connexe Z, il existe un chemin rectifiable de longueur bornée par un $\lambda \max(Z, x)$ et joignant ces deux points. Tel est le cas, en particulier, lorsque dans $\mathbb{R}^n$, l'ensemble Z est la fermeture topologique d'un ouvert relativement compact. La précaution d'avoir des arcs rectifiables est destinée à exclure des compacts comme par exemple une spirale qui s'enroule indéfiniment autour d'un cercle.

2.2 Les éléments ultimes des fronts d'onde

Cette section 2.2 reprend sous une autre présentation des résultats de C. Lantuejoul et S. Beucher[6]. En se plaçant dans le cadre géodésique, il devient possible d'associer à tout point $x \in Z, Z \in \mathbb{R}^n$, le ou les points $y \in Z$ qui sont les plus éloignés de x. Soit en effet $\overset{\circ}{B}(\lambda, x)$, la boule géodésique ouverte de rayon λ et de centre x et λ_0 la borne supérieure des λ tels que $\overset{\circ}{B}(\lambda, x)$ soit strictement

inclus dans Z. Comme les compacts non vides $\left\{Z \backslash \overset{\circ}{B}(\lambda, x), \lambda < \lambda_0\right\}$ décroissent et que $\mathbb{R}^n$ est un espace séparé, l'intersection

$$\bigcap_{x<\lambda_0} \left[Z \setminus \overset{\circ}{B}(\lambda, x)\right] \tag{1}$$

est elle-même un compact non vide, dont tous les points sont à la distance maximale λ_0 de x. On appelle "érodé ultime" cette intersection, et $\overset{\circ}{B}(\lambda_0, x)$ dilaté ultime du point x.

L'existence de points extrêmes peut s'envisager aussi dans un cadre régional, et non plus global. Il faut supposer que, Z et x étant donnés, on peut trouver un $\mu(Z, x) < \lambda_0(Z, x)$ tel que chaque composante connexe de $Z \setminus \overset{\circ}{B}(\lambda, x), \mu \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$ diminue sans se subdiviser. Il suffit alors d'appliquer l'analyse précédente aux ensembles

$$K_i \cap \left[Z \setminus \overset{\circ}{B}(\lambda, x)\right] \qquad \mu \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$$

où les $K_i, i \in I$ désignent les composantes connexes de $Z \setminus \overset{\circ}{B}(\mu, x)$. On obtient ainsi les éloignés ultimes du point x, comme par exemple les extrémités des doigts pour x pris vers le milieu du poignet.

Les deux familles d'algorithmes issus de la géodésie correspondent aux deux points de vue que nous venons de parcourir. L'invasion par boules géodésiques a conduit à toutes les variantes de reconstruction de particules (suppression des objets coupant le bord du champ, bouchage des trous, analyse individuelle, etc ...) et la recherche de résidus extrémaux a conduit aux érodés ultimes, aux extrémités d'objets et à la longueur d'une composante connexe (comme supremum des distances entre couples de points extrêmes).

2.3 Digitalisation

La digitalisation des opérations géodésiques provoque des erreurs, mais limitées; on a d'ailleurs intérêt à choisir pour cercle ou sphère unité les formes les plus proches possibles de leurs homologues euclidiens. Aussi, l'hexagone, dont les six sommets sont équidistants du centre, vaut-il mieux que le carré, et, pour la même raison, le cuboctaèdre est-il préférable au cube.

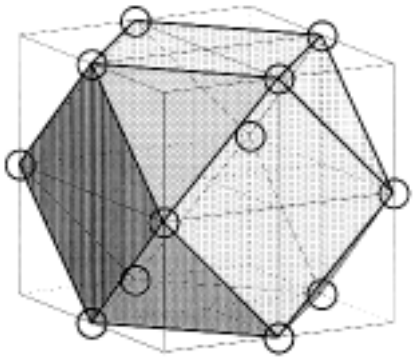

Figure4:cuboctaèdre régulier

Cette boule de $\mathbb{Z}^3$ se construit très facilement lorsqu'on dispose d'un réseau de données numériques en trame cubique [12], puisqu'il suffit de décaler tous les plans pairs d'une demi-diagonale de cube unité (n'importe laquelle, mais toujours la même).Pratiquement, ce ne sont certes pas les données que l'on décale, mais les éléments structurants. Ainsi, le substitut des 13 sommets du cuboctaèdre régulier de la figure 4 est obtenu en dilatant le point central par l'élément structurant suivant, porté par trois plans successifs, et qui n'est pas le même selon que le centre se situe dans un plan pair (a/) ou impair (b/) (cf figure 5).

1	1	.	.	1	.	1	1	.		
1	1	.	1	1	1	1	1	.	a/	
.	.	.	.	1	.	.	.	.		
1er plan			2nd plan			3ème plan				
.	.	.	.	1	.	.	.	.		
.	1	1	1	1	1	.	1	1	b/	
.	1	1	.	1	.	.	1	1		

figure 5 : découpage en quinconces

Le front d'onde issu de ce point central commence par les 12 voisins du point; lorsque l'interplan vaut a$\sqrt{3/2}$ (a = maille carrée des plans horizontaux), la structure devient totalement isotrope et les 12 voisins sont équidistants du centre. C'est ce que nous supposerons en section 5 à propos du tibia, mais l'hypothèse n'a rien d'impératif, et en tout cas ne s'applique pas à l'étude des embryons de reins de la section 3.

Le passage de la boule unité $C(x)$ de $\mathbb{Z}^3$ (octaèdre, prisme ou cube) à sa version géodésique $B_1(x)$ à l'intérieur d'un masque Z n'est autre que

$$B_1(x) = C\,(x) \cap Z$$

et la boule géodésique $B_x(x)$ de la taille s'obtient pas n itérations de la précédente :

$$B_n(x) = B_1[B_{n-1}(x)] \cap Z \tag{2}$$

Le front d'onde correspondant, ou sphère géodésique, vaut

$$F_n(x) = B_{n+1}(x) \setminus B_n(x) \tag{3}$$

2.4 Fronts d'ondes et arborescences

Soit Z un compact de $\mathbb{R}^n$ et $x \in Z$, un point de Z. Nous nous proposons d'étudier l'évolution du nombre des composantes connexes du front d'onde $F(\lambda, x)$ quand, λ augmentant, l'espace compact Z est balayé. On suppose que les éléments critiques, bifurcation ou confluent, restent en nombre fini quand $\lambda \in [0, \lambda \max]$, de sorte qu'on peut toujours trouver au voisinage d'une bifurcation, pour $\lambda = \lambda_0$ un intervalle ouvert $]\lambda_1, \lambda_2[$ de valeurs de λ, contenant λ_0, et dans lequel on ne rencontre pas d'autre bifurcation. On suppose fini le nombre des rameaux qui se regroupent en λ_0. Enfin, comme la bifurcation peut adopter les deux formes duales de la division ou du confluent lorsque λ augmente, on considère conventionnellement que le passage $\lambda_1 \to \lambda_2$ correspond à une division.

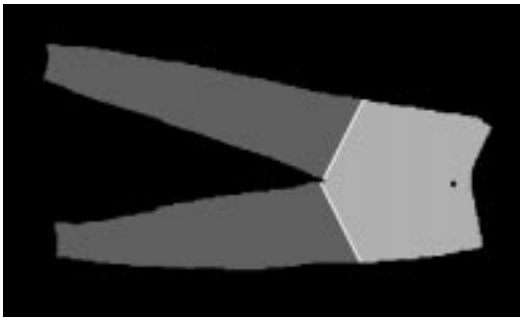

figure 6 : exemple de bifurcation

On est donc amené à la situation représentée en figure 6 où le point x est en noir, la boule $\overset{\circ}{B}(\lambda_0, x)$ en gris clair, son complément $K(\lambda_0)$ dans Z en gris foncé, et où le front d'onde, qui apparait en blanc, marque le moment précis de la bifurcation. Ainsi, le compact

$$K(\lambda) = Z \setminus \overset{\circ}{B}(\lambda, x)$$

possède une unique composante connexe, lorsque $\lambda < \lambda_0$ et davantage quand $\lambda > \lambda_0$. Pour déterminer ce qui se passe en $\lambda = \lambda_0$, notons d'abord que s'agissant de compacts, on a $\cap \{K(\lambda), \lambda < \lambda_0\} = K(\lambda_0)$.

Le compact $K(\lambda_0)$ est formé d'une seule composante connexe. Sinon, elles seraient séparées par une distance minimale d, ce qui est incompatible avec le fait que pour toute dilatation de taille ε, avec $0 < \varepsilon < d$, le dilaté géodésique de

$K(\lambda_0)$ devient connexe. Il s'en suit que le front $F(\lambda_0, x)$ lui-même est connexe, car sinon pour aller d'une de ses composantes à une autre, il faudrait passer par un $K(\lambda)$ avec $\lambda > \lambda_0$, or ces $K(\lambda)$ ne sont plus connexes.

Lorsque Z présente plusieurs bifurcations, la même description s'applique à chacun des branchements, amont ou aval, de la propagation émanant du point x, ce qui partitionne par conséquent l'ensemble Z en tronçons successifs.

Il reste à envisager le cas du branchement en X, où deux rameaux au moins arrivent au front critique, et au moins deux en partent. Dans ce cas, la région connexe intermédiaire est réduite au front en λ_0, car si elle était plus large, on serait ramené au cas précédent, et si elle n'existe pas, il n'y a plus d'élément critique, mais seulement des rameaux disjoints. Regroupant ces résultats, on peut énoncer :

Proposition 2 *Soit un compact Z de $\mathbb{R}^n$. Si pour tout point $x \in Z$ le front d'onde $F(\lambda, x)$ issu de x admet un nombre fini, et à variation finie, de composantes connexes, alors quand le rayon λ varie $F(\lambda, x)$ partitionne Z en un nombre fini de tronçons connexes correspondant à des intervalles ouverts de λ, et séparés par des composantes connexes du front qui sont localisées aux points critiques des bifurcations.*

L'application $x \to P(x)$ qui, à tout point $x \in Z$ associe l'arborescence caractérisée par la proposition, varie évidemment avec le choix du point x, même si, lorsqu'il s'agit d'un arbre au sens du langage courant, le découpage reste pratiquement le même pour tous les points pris suffisamment bas dans le tronc. Dans ce cas, du reste, on peut définir l'arbre comme une partition pour laquelle il n'existe pas de confluents pour x convenablement choisi (i.e. dans le tronc).

A noter que c'est de connexité qu'il est ici question, et non pas d'homotopie: dans $\mathbb{R}^3$ en particulier les tronçons peuvent présenter des pores fermés ou être percés de trous toriques.

3 Application à l'arborescence de reins embryonnaires

Pour illustrer ce qui précède, proposons nous de segmenter le premier des deux reins de la fig. 1. L'analyse comporte quatre étapes :

1/ construction d'un ensemble à partir des données initiales;
2/ fonction distance géodésique d'un marqueur dans l'ensemble;
3/ extrémités;
4/ branchements.

3.1 Binarisation

L'opération, simple, ne nécessite qu'un seuillage entre 60 et 255, suivi du bouchage des pores internes bi-dimensionnels. Il reste à extraire la composante connexe

majeure. Dans ce but, on construit une séquence "marqueur" réduite au début, connexe, du tronc. La reconstruction montre que l'arborescence rénale est brisée vers le milieu en deux morceaux disjoints. C'est l'imprécision de la microscopie confocale qui en est la cause. On y a remédié en reconnectant manuellement les deux parties.

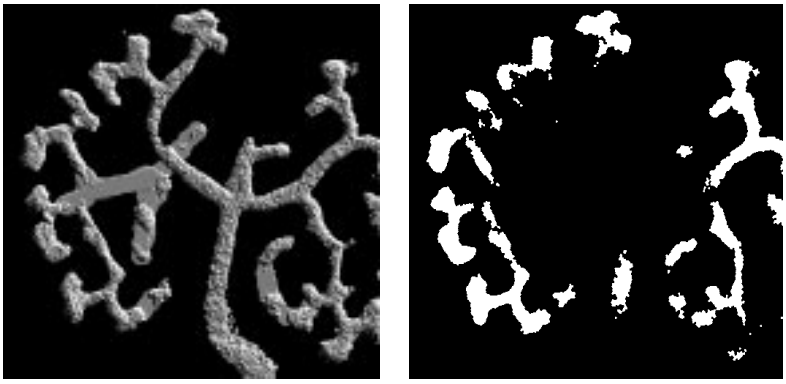

Fig.7 : rein binarisé a) vue perspective, b) coupe n°14

3.2 Fonction distance géodésique

La fonction distance géodésique part du marqueur du pied de rein et progresse dans l'arborescence selon des cubeoctaèdres unité (fig. 8)

Fig.8: Fonction distance géodésique à partir du pied d'ancrage (négatif du supremum des coupes).

3.3 Extrémités

Les extrémités ne sont rien d'autre que les maxima régionaux de la fonction géodésique précédente. Ces érodés ultimes apparaissent en fig.9a, où l'on voit beaucoup de tous petits maxima réels, mais assez peu significatifs. Ils sont retirés par une ouverture surfacique (fig.9b). Lors d'un usage plus systématique de cet algorithme, on aura intérêt à commencer par régulariser l'ensemble étudié par une ouverture tridimensionnelle isotrope, de taille 1 ou 2, à condition qu'elle ne brise pas la connexité.

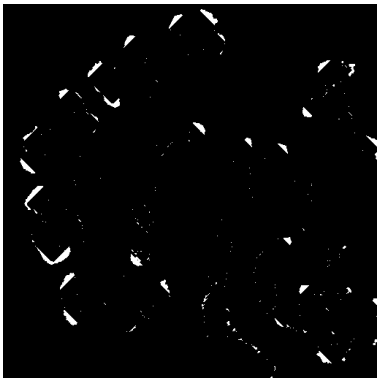

Fig.9a:extrémités

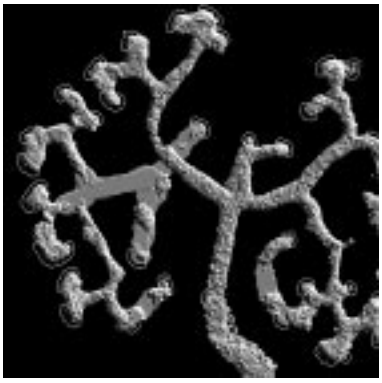

Fig.9b: extrémités filtrées

3.4 Branchements

L'extraction des branchements, conceptuellement simple, peut conduire à un traitement d'image assez lourd. Compte-tenu de la structure assez visible de l'arbre en projection, nous utiliserons un algorithme un peu moins précis, mais plus simple à mettre en oeuvre.

Dans un premier temps, on recherche les bifurcations bidimensionnelles sur la projection de l'arbre, puis, on remonte à l'espace en construisant un cylindre vertical ayant pour base la bifurcation 2D repérée, et légèrement dilatée (taille 2), cylindre qu'on intersecte avec l'ensemble 3D de l'arborescence. L'opération, menée successivement pour toutes les bifurcations de la projection 2D, aboutit à la figure 10.

Figure 10: bifurcations tridimensionnelles vues en projection

3.5 Résultats

Au total, partant de l'ensemble connexe de l'arborescence rénale, nous sommes arrivés à une segmentation de celle-ci en branches disjointes et en lames de bifurcation, certaines branches contenant une extrémité de l'arbre. A partir de là, on aurait intérêt à considérer l'objet d'étude comme un arbre au sens des graphes, arbre pondéré par le vecteur de ses caractéristiques principales (volume, longueur, location de son centre, extrémités éventuelles, etc ...).

4 Intermède : la constante d'Euler-Poincaré

La constante d'Euler-Poincaré est apparue historiquement dans deux cadres de pensée sensiblement différents. Il y a d'abord eu le raisonnement d'Euler sur les relations entre sommets, faces et arêtes dans les polyèdres, qui s'est prolongé par les graphes planaires, dûs à Cauchy. Cette lignée conduit aux algorithmes de dénombrements, où l'on détermine, en trame hexagonale par exemple, les triangles et les arêtes dans les directions principales de la grille. Elle s'étend aux diverses grilles cubiques, cuboctaédriques et rhombododécaédriques de $\mathbb{R}^3$, sans difficulté théorique particulière, mais avec un alourdissement des opérations élémentaires à effectuer.

La deuxième piste, celle de Poincaré, puis de Hadwiger, enchaîne les définitions successives de la constante par un procédé de récurrence portant sur les dimensions de l'espace[4]. Lorsqu'on passe en digital, ce procédé oblige à se limiter aux trames parallélépipédiques, mais en revanche débouche sur une expression beaucoup plus simple et rapide que celle des graphes. Ainsi, pour un ensemble A borné :

Dans $\mathbb{R}^1$, $v_1(A) = N(\text{sommets}) - N(\text{arêtes}) = N(\bullet) - N(-)$

Dans $\mathbb{R}^2$, il vient pour la grille carrée :

$$v_2(A) = N(\text{sommets}) - N(\text{arêtes}) + N(\text{faces})$$

$$= N(\bullet) - N(-) - N(|) + N(\square)$$

L'ensemble A est maintenant bi-dimensionnel, mais si l'on convient d'appeler $v_1(A)$ la somme des constantes v_1 de ses sections horizontales, on voit que

$$v_2(A) = v_1(A) - v_1(A \ominus |)$$

Dans $\mathbb{R}^3$, il en va de même, et le nombre d'Euler $v_3(A)$ défini comme

$$v_3(A) = N(\text{sommets}) - N(\text{arêtes}) + N(\text{faces}) - N(\text{blocs})$$

c'est à dire

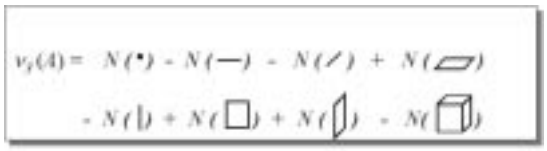

Fig 11 : Constante d'Euler-Poincaré dans $\mathbb{R}^3$

s'exprime par le même accroissement que précédemment, puisque

$$v_3(A) = v_2(A) - v_2(A \ominus |) \tag{4}$$

où $v_2(A)$ est la somme des nombres d'Euler bi-dimensionnels des sections horizontales de A (la relation 4 s'étend facilement à $\mathbb{R}^n$ par récurrence). La constante v_3 est indépendante du choix de la direction "verticale" adopté.

Expérimentalement parlant, l'équation 4 est très pratique, car dans les systèmes de traitement d'image, les constantes d'Euler bi-dimensionnelles sont en général rapides à obtenir, et l'érosion linéaire unité entre deux plans consécutifs est aussi une opération simple. C'est cette relation 4 qui, dans l'exemple qui suit sur la diaphyse du tibia, a été utilisée pour le calcul de toutes les constantes d'Euler qui apparaissent.

Géométriquement parlant enfin, on n'oubliera pas que la constante d'Euler d'un objet simplement connexe, i.e. homéomorphe à un cube, vaut toujours 1, que celle d'un tore, c'est à dire d'une figure comme un écrou ou un abat-jour, vaut toujours 0, et celle d'une couronne sphérique, comme un ballon de football, vaut 2. De plus, la constante v est C-additive, c'est à dire que

$$v(A) + v(A') = v(A \cup A') + v(A \cap A')$$

ce qui, à la fois, lui donne un sens local, et permet d'interpréter des figures complexes à partir des plus simples. Ainsi, la constante d'un abat-jour percé de 1 000 trous d'épingle vaut -1 000.

5 Diaphyse de tibia d'embryons de poulets

5.1 But

La zone d'os étudiée se situe dans la partie centrale d'un tibia d'embryon de poulet, dont l'axe définit la verticale. On dispose d'une série de 98 coupes rectangulaires de 320 x 310 pixels chacune. Les images numériques initiales se binarisent sans aucune difficulté, ni ambiguité (Figure 12a). Les deux questions à traiter sont les suivantes :

1/ Mettre en oeuvre et vérifier le modèle du Dr Staub, c'est à dire passer du modèle de cylindres emboîtés à une segmentation effective de l'os en structures gigognes à l'aide d'un critère quantitatif à trouver.

2/ Ayant obtenu la segmentation, extraire plus spécifiquement les ponts qui relient deux cylindres successifs, et décrire par ailleurs l'homotopie du cylindre isolé.

5.2 Algorithme

Par souci pédagogique, nous travaillons d'une part sur la totalité des 98 coupes, et parallèlement sur les 14 premières. On appelle "os" le premier dossier, et "os 1" le second. Ce dossier réduit permet de mieux visualiser certaines structures ; d'autre part, la confrontation des fronts d'onde d'os et d'os 1 nous renseignera sur leur représentativité.

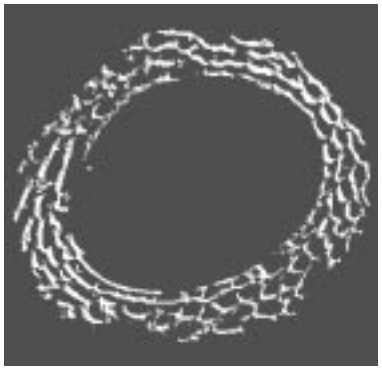

Fig.12a : vue perpective d'os1

Fig. 12b : cylindre marqueur central M

Si le modèle de cylindres gigognes est exact, le front d'onde émis de la zone médulaire centrale et pénétrant dans l'os doit progresser plus vite lorsqu'il envahit une couronne cylindrique que lorsqu'il franchit les isthmes étroits qui connectent les couronnes entre elles. Il faut donc :

- créer un marqueur central pertinent M;

- tracer le graphe de la surface du front d'onde $F(\lambda, M)$ en fonction de la distance λ, qui devrait présenter des oscillations à minima (plus ou moins) périodiques;
- décomposer l'onde géodésique en tronçons délimités par les valeurs des minima (segmentation de l'os);
- extraire les fronts d'onde à chaque minimum, ce qui donne les ponts;
- calculer la constante d'Euler des ensembles ponts, et cylindres;

... toutes opérations que nous allons maintenant effectuer.

5.3 Résultats

Le marqueur central M s'obtient en travaillant section par section, en en extrayant le pore central après ouverture (algorithme os1), cf fig. 12b

La variation des mesures de surface du front d'onde, pour les fichiers os et os1 est représentée en fig. 13. Leurs minima se situent à peu près aux mêmes abcisses, comme 16 au lieu de 13 ou 6 au lieu de 5, ce qui est de bon augure

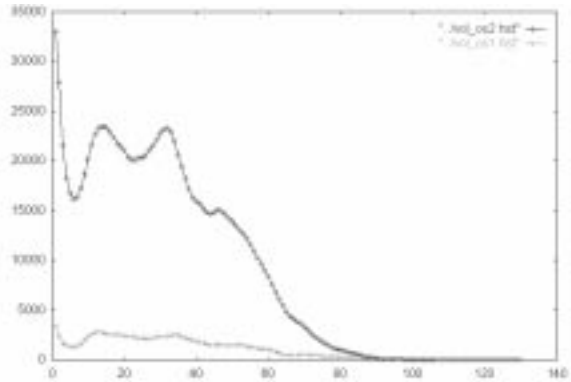

Fig.13:variation de la surfacedu frontd'onde

Les segmentations de os et de os1 effectuées sur la base des minima

$$6; 22; 44; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ pour os}$$
$$5; 18, 24; 41, 65; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ pour os1}$$

conduit aux deux résultats montrés en fig. 14

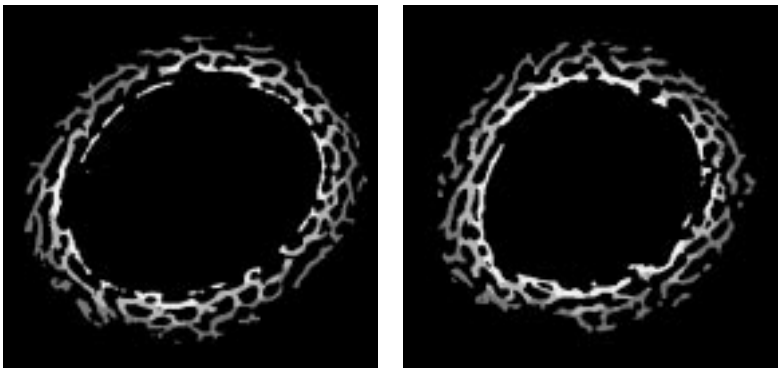

Fig. 14 : segmentations des deux coupes de la figure 2

Pour pouvoir extraire les jonctions entre cylindres, il faut recourir à une hypothèse plus forte et partiellement inexacte, et supposer que les fronts d'onde correspondant à chaque minimum se trouvent tous dans ces goulets étroits. Moyennant cette approximation, les ponts entre les cylindres n°i et $i+1$ coïncident avec la différence ensembliste entre les dilatés géodésiques de tailles m + 1 et m, où m est l'abcisse du minimum séparant les deux cylindres. La figure 15 visualise les zones de contact entre les deux premiers cylindres, pour les fichiers os et os1.

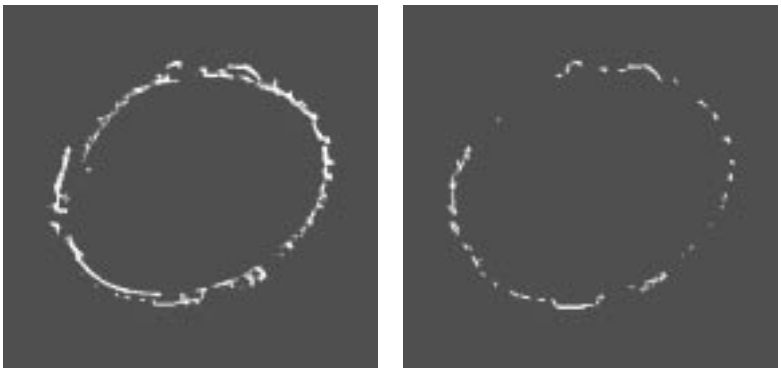

Fig. 15 : Vue perspective des ponts, dilatés, pour os et os1

Venons-en au dernier point, celui des dénombrements associés aux divers ensembles mis en évidence (tableau 16):

Région	*Nombre d'Euler Poincaré*	
	os	*os1*
os initial	*- 1 536*	*- 237*
composante connexe adjacente au marqueur	*- 1 885*	*- 275*
ponts entre les 2 premiers cylindres	*1 447*	*205*
mêmes ponts, suivis d'une dilatation unité	*32*	*10*

Tableau 16 : valeurs du nombre d'Euler-Poincaré

Comme on peut le constater, l'os est passablement percé et brisé. Brisé, puisqu'en réduisant l'objet à sa partie adjacente au marqueur central, on lui retire au moins 1 885 - 1 536 = 349 petits morceaux isolés (artefacts expérimentaux ?). Percé, puisque cette composante connexe possède 1885 trous, si l'on admet toutefois qu'elle ne renferme pas de lacunes fermés internes (ce qui semble réaliste au vu des épaisseurs mises en jeu).

Une analyse plus fine pourrait déterminer la granulométrie des trous par fermeture ou érosion. Nous ne l'avons pas menée pour ces lacunes toriques, mais pour les ponts dont le nombre, 1 447, paraît bien élevé. En fait, plus qu'un boulon fixant un cylindre au suivant, un joint se présente plutôt comme un paquet de fibres plus ou moins anastomosées. Voilà pourquoi une dilation élémentaire (les 13 voxels du cube-octaèdre unité) ramène le nombre d'Euler-Poincaré de 1 447 à 205.

6 Métriques et dilatation

Dans les deux exemples traités, nous nous sommes donnés comme point de départ une métrique digitale, celle dont les boules sont les cuboctaèdres de $\mathbb{R}^3$. Nous avons ensuite considéré les cuboctaèdres $\mathrm{B}_1(x)$ centrés en x et de taille 1 comme éléments structurants et utilisé la dilatation qu'ils définissent pour construire les fronts d'onde. Enfin, nous avons interprété ces derniers comme les sphères d'une nouvelle métrique, dite géodésique, en appliquant le théorème de Choquet.

Ce faisant, nous avons approximé des ensembles et des opérateurs euclidiens par des représentations finies : ni le rein, ni l'os d'un mammifère ne se réduisent à quelques points sur une grille cubique. Mais aussi, nous avons substitué subrepticement une famille de dilatations aux boules de la métrique quand il s'est agi d'implémenter ces dernières. Les deux notions sont-elles équivalentes ? Plus généralement, dans quelle mesure une famille $\{\delta_{\lambda,}\lambda > O\}$ de dilatations sur un treillis L engendre-t-elle une métrique sur L? Suffit-il qu'elles croissent avec le paramètre positif λ? C'est la question que nous allons étudier maintenant.

Dans un premier temps, nous comparerons les dilatations à des écarts plutôt qu'à des distances. D'abord parce que c'est plus simple, et ensuite car la notion d'écart est mieux adaptée à la structure de treillis.

Definition 3 *On appelle écart sur un ensemble L toute application e de $L \otimes L$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ telle que*
i/ $(x = y) \Longrightarrow (e(x,y) = 0)$
ii/ $e(x,y) = e(y,x)$
iii/ $e(x,y) \leqslant e(x,z) + e(z,y)$

Les deux différences avec la notion de distance, à savoir que l'écart e peut prendre la valeur $+\infty$ et que deux points distincts peuvent avoir un écart nul, sont indispensables pour structurer les écarts en treillis complet, chose impossible avec les distances. Soit, en effet $e(x,y) = \sup\{e_j(x,y), j \in J\}$, où les e_j sont des écarts. L'application $e : L \otimes L \to \overline{\mathbb{R}}_+$ vérifie évidemment les deux axiomes *i/* et *ii/*.

D'autre part, on a pour tout i

$$e_i(x,y) \leqslant e_i(x,z) + e_i(z,y) \leqslant e(u,z) + e(z,y)$$

d'où

$$e(x,y) \leqslant e(x,z) + e(z,y)$$

Le supremum d'écarts est donc un écart. Par ailleurs, il existe un plus petit écart $e(x,y) = 0, \quad \forall x,y$; comme tout sup demi treillis doté d'un élément minimal est un treillis complet, nous pouvons énoncer

Proposition 4 *La classe des écarts $e : L \otimes L \to \overline{\mathbb{R}}_+$ sur un espace L forme un treillis complet où le supremum coïncide avec le supremum numérique.*

Les liens entre écarts et dilatations sont régis par le résultat suivant

Proposition 5 ***Proposition 6*** *Soit L un treillis complet et $\{\delta_\lambda, \lambda > 0\}$ une famille de dilatations de L dans lui-même dépendant du paramètre positif λ. Les δ_λ engendrent un écart sur L si et seulement si*

$$iv/ \quad \delta_\lambda \geqslant I \qquad (\ \delta_\lambda \text{ est extensive pour tout } \lambda \geqslant 0) \tag{5}$$

$$v/ \quad \delta_\lambda \delta_\mu \leqslant \delta_{\lambda+\mu} \qquad \lambda, \mu \geqslant 0 \tag{6}$$

La famille δ_λ est alors croissante en λ et la quantité

$$e(x,y) = \inf \lambda \{x \leqslant \delta_\lambda(y), y \leqslant \delta_\lambda(x)\} \qquad x, y \in L \tag{7}$$

définit un écart sur le treillis L.

Proof. les deux axiomes *iv/* et *v/* entrainent la croissance de l'application $\lambda \to \delta_\lambda$, car, pour tout μ et tout λ, l'on a

$$I \leqslant \delta_\lambda \Longrightarrow \delta_\mu \leqslant \delta_\mu \delta_\lambda \leqslant \delta_{\mu+\lambda}$$

Montrons maintenant qu'ils impliquent aussi les trois axiomes de définition d'un écart. Comme $x \leqslant \delta_\lambda(x)$ pour tout λ (axiome *iv/*), la quantité $e(x,x) = 0$ pour

tout x (axiome $i/$) ; l'axiome $ii/$ est évident par symétrie de l'inégalité 6. Pour vérifier l'inégalité triangulaire $iii/$, considérons trois éléments x, y, z de L avec

$$\lambda_1 = e(y,z) \quad \lambda_2 = e(z,x) \quad \lambda_3 = e(x,y)$$

Si λ_1 ou $\lambda_3 = \infty$, alors $\lambda_2 \leqslant \lambda_1 + \lambda_3$. Sinon, des inégalités

$$x \leqslant \delta_{\lambda 3+\varepsilon}(y) \qquad et \qquad y \leqslant \delta_{\lambda 3+\varepsilon}(x)$$

pour tout $\varepsilon > 0$, et de

$$y \leqslant \delta_{\lambda 1+\varepsilon}(z) \qquad et \qquad z \leqslant \delta_{\lambda 1+\varepsilon}(y)$$

on tire, par application de l'axiome $v/$:

$$x \leqslant \delta_{\lambda 3+\varepsilon}\delta_{\lambda 1+\varepsilon}(z) \leqslant \delta_{\lambda 1+\lambda 3+2\varepsilon}(z)$$

et de même $z \leqslant \delta_{\lambda 1+\lambda 3+2\varepsilon}(x)$. Par conséquent,

$$\lambda_2 \leqslant \lambda_1 + \lambda_3 + 2\varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$, d'où l'inégalité triangulaire.

Réciproquement, partons d'un écart e sur L de boules fermées δ_λ

$$\delta_\lambda(x) = \{y : e(x,y) \leqslant \lambda\} \tag{8}$$

L'axiome $i/$ entraîne que les δ_λ sont extensifs (axiome $iv/$). Pour prouver l'axiome $v/$ on remarque que pour tout élément $z \leqslant \delta_\lambda\delta_\mu(x)$, il existe un élément $y \leqslant \delta_\mu(x)$ avec $z \leqslant \delta_\lambda(y)$, i.e.

$$e(x,y) \leqslant \mu \qquad et \qquad e(y,z) \leqslant \lambda$$

d'où, par inégalité triangulaire $iii/$

$$e(x,z) \leqslant e(x,y) + e(y,z) \leqslant \lambda + \mu$$

donc $z \leqslant \delta_{\lambda+\mu}(x)$ et finalement

$$\delta_\lambda\delta_\mu(x) = \bigvee\{z : z \leqslant \delta_\lambda\delta_\mu(x)\} \leqslant \delta_{\lambda+\mu}(x)$$

c'est-à-dire l'axiome $v/$ ■

Il résulte de la proposition que les deux équations 7 et 8 reliant écart et dilatation sont équivalentes et réciproques l'une de l'autre.

Lorsqu'on passe aux distances, les choses se compliquent un peu. Il faut tout d'abord se restreindre aux classes d'éléments de L pour lesquelles l'écart ne peut pas prendre de valeurs infinies (classes qui n'ont pas besoin d'être elles-mêmes des sous-treillis de L), et, de plus, l'axiome d'extensivité $iv/$ ne suffit plus à garantir l'axiome $i\prime/$

$$i\prime/\,(x = y) \Longleftrightarrow (d(x,y) = 0) \tag{9}$$

Par exemple, si l'on prend

$$\begin{aligned} \delta_\lambda(x) &= \{x, x_o, y_o\} \qquad \lambda > 0 \\ \delta_o(x) &= \{x\} \end{aligned}$$

où x_o et y_o sont deux éléments fixes et distincts de L, la proposition 5 s'applique: on a donc bien un écart, mais pas de distance, car $e(x_o, y_o) = 0$ alors que $x_o \neq y_o$. Il faut remplacer la simple extensivité *iv/* par l'axiome *iv'/* de convergence monotone :

$$iv'/\ \lambda \downarrow 0 \Longrightarrow \delta_\lambda \downarrow I$$

qui est beaucoup plus sévère (il signifie que les δ_λ croissent avec λ et que $I = \bigwedge \{\delta_\lambda, \lambda > 0\}$). Lorsque cette condition est vérifiée, $d(x,y) = 0$ entraîne, d'après la relation 7 que

$$x \leqslant \bigwedge \{\delta_\lambda(y), \lambda > 0\} = y$$

et de même $y \leqslant x$. Inversement, le contre-exemple présenté à l'instant avec (x_o, y_o) montre la nécessité de la condition. On peut donc énoncer

Proposition 7 *Soit $\{\delta_\lambda, \lambda > 0\}$, une famille de dilatations du treillis L dans lui-même. Les δ_λ engendrent une métrique si et seulement si*

$$\begin{gathered} iv'/\lambda \downarrow 0 \ \ implique \ \ \delta_\lambda \downarrow I \\ v/\delta_\lambda \delta_\mu \leqslant \delta_{\lambda+\mu} \end{gathered}$$

et si l'on restreint son domaine aux classes L' d'éléments de L telles que pour tout $x, y \in L'$ l'on ait

$$d(x,y) = \inf\{\lambda : x \leqslant \delta_\lambda(y), y \leqslant \delta_\lambda(x)\} < \infty \tag{10}$$

où d est la distance induite par les δ_λ.

L'écart de Hausdorff sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, qui devient une distance lorsqu'on la restreint aux compacts non vides de $\mathbb{R}^n$ illustre parfaitement la distinction entre les propositions 5 et 6. Plus encore, cet exemple montre qu'appliquée à un treillis du type $\mathcal{P}(E)$, la relation 10, de type Hausdorff, induit aussi un écart sur E lorsqu'on la restreint aux singletons de $\mathcal{P}(E)$.

La boule $B_\lambda(x)$, de rayon λ et centrée en x s'exprime commodément si nous introduisons la dilatation $\overset{\vee}{\delta}$ *réciproque* de δ, et définie par l'équivalence

$$x \leqslant \delta(y) \Longleftrightarrow y \leqslant \overset{\vee}{\delta}(x)$$

Qu'il s'agisse d'écart ou de distance, il vient alors, compte-tenu des expressions 7 et 10

$$B_\lambda(x) = \{y : d(x,y) \leqslant \lambda\} = \left[\bigwedge_{\mu > \lambda} \delta_\mu(x)\right] \wedge \left[\bigwedge_{\mu > \lambda} \overset{\vee}{\delta}_\mu(x)\right] \tag{11}$$

Quand δ_λ est $\downarrow$-continue pour tout λ, l'expression se réduit à

$$B_\lambda(x) = \delta_\lambda(x) \wedge \overset{\vee}{\delta}_\lambda(x)$$

Enfin, si la dilatation est symétrique, i.e. égale à sa transposée, on trouve finalement $B_\lambda = \delta_\lambda$. Tel est le cas, par exemple , lorsque les δ_λ sont des convexes symétriques homothétiques. Lorsqu'on se place dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, G.Matheron [7] a montré que si les δ_λ commutent avec les translations, et expriment par conséquent une addition de Minkowski, ils forment un semi-groupe additif à un paramètre positif, *i.e.* $\delta_\lambda \delta_\mu = \delta_{\lambda+\mu}$ si et seulement si les δ_λ sont des convexes symétriques homothétiques (il est facile de voir que l'homothétie entraîne $\delta_\lambda \delta_\mu \geqslant \delta_{\lambda+\mu}$, d'où finalement l'égalité $\delta_\lambda \delta_\mu = \delta_{\lambda+\mu}$, mais la réciproque est moins évidente).

7 Connexité, géodésiques et semi-groupe

Pour pouvoir construire des fronts d'onde, la donnée d'une métrique préalable est condition nécessaire mais pas suffisante. L'on doit aussi s'assurer que tout point de l'espace reste accessible à partir de tout autre par une succession de dilatations aussi petites que l'on veut, c'est à dire dans le cas digital, de taille unité. Exprimée en termes de distance, cette condition conduit à la notion d'espace métrique *bien enchaîné (*[2], p 76).

Definition 8 *un espace métrique E est bien enchaîné si, pour tout couple (a,b) de points de E et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite finie de points de E : $a_1 ... a_n$, avec $a_1 = a$ et $a_n = b$ telle que $d(a_i, a_{i+1}) \leq \varepsilon$ pour tout $i < n$.*

Tout l'intérêt de cette définition vient de ce qu'elle interprète en termes de métrique la connexité d'une région de l'espace. En effet :

Proposition 9 *Dire qu'un espace métrique compact est connexe équivaut à dire qu'il est bien enchaîné ([2], p 77)*

La proposition 8 valide les procédures géodésiques d'extraction de composants connexes, et donne une signification euclidienne à ces démarches digitales ([10], p 82), si et seulement si les métriques sous-jacentes sont bien enchaînées (il s'agit ici de la connexité topologique).

Intuitivement, on peut dire que les métriques mal enchaînés comportent des sortes de murs verticaux de distances, plus ou moins longs et épais, et placés à travers l'espace. Par exemple, dans le plan euclidien de coordonnées x et y, la somme d de la distance euclidienne d_1, plus de l'écart d_2 suivant

$d_2[(x,y)(x',y')] = 0$ si x et $x' < 0$ ou si x et $x' \geq 0$

$d_2[(x,y)(x',y')] = 1$ sinon

est une distance, comme toute somme d'une distance et d'un écart borné, mais ne permet pas de franchir l'axe des ordonnées par des dilatations plus petites que 1.

La proposition 8 de Choquet relie la connexité d'un compact à un propriété métrique portant sur des *chemins*. Or l'analyse d'image met bien plus en jeu le point de vue dual : on construit les fronts d'onde d'un point, c'est à dire les cercles (dans le plan) ou les sphères (dans l'espace) qui émanent de ce point, mais on ne détermine pas les rayons correspondants. Le passage d'un point de vue à l'autre est gouverné par la relation suivante :

Proposition 10 *Soit* $\{\delta_\lambda, \lambda > 0\}$ *une famille de dilatations symétriques du treillis* L *dans lui-même, qui engendrent une métrique sur* L*. Cette métrique admet des géodésiques si et seulement si les* δ_λ *vérifient la loi de semi-groupe*

$$\delta_{\lambda+\mu} = \delta_\lambda \delta_\mu \qquad \lambda, \mu > 0 \tag{12}$$

Proof. Supposons la relation 12 vérifiée. Il vient alors, compte tenu de la $\downarrow$-continuité des δ_v à l'origine :

$$\delta_\lambda \leq \bigwedge_{\mu \geq \lambda} \delta_\mu = \bigwedge_{v>0} \delta_{\lambda+v} = \bigwedge_{v>0} \delta_v \delta_\lambda = \delta_\lambda$$

L'expression 11 de la boule $\mathrm{B}_\lambda(x)$ se réduit donc à

$$B_\lambda(x) = \delta_\lambda(x) \wedge \breve{\delta}_\lambda(x)$$

Comme de plus les $\{\delta_\lambda(x), x \in L\}$ sont symétriques, ils s'identifient aux boules $\mathrm{B}_\lambda(x)$ de la métrique induite. Soient alors $x, y \in L$ avec $d(x,y) = \lambda + \mu$; on a d'après 12

$$y \in \delta_{\lambda+\mu}(x) = \delta_\mu \delta_\lambda(x);$$

il existe donc un élément $z \in L$ tel que $z \leq \delta_\lambda(x)$ et $y \leq \delta_\mu(z)$, soit, compte tenu de l'inégalité triangulaires entre x, y et z :

$$d(x,z) + d(z,y) \leq \lambda + \mu = d(x,y) \leq d(z,y) + d(z,y)$$

Ainsi, l'élément z se trouve exactement à la distance λ de x et μ de y. Quand λ et μ varient la famille de tels éléments z engendre par conséquent la ou les géodésiques entre x et y.

Inversement, supposons l'existence d'une géodésique de x à y et soit $y \leq \delta_{\lambda+\mu}(x)$. Considérons sur cette géodésique l'élément z, dans le rapport des distances $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ à x et $\frac{\mu}{x+\mu}$ à y. Comme $d(x,y) \leq \lambda + \mu$, la distance de z à vérifie l'inégalité

$$d(x,z) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} d(x,y) \leq \lambda \qquad \text{soit} \quad z \leq \delta_\lambda(x)$$

on a de même $z \leq \delta_\mu(y)$, ou bien aussi $y \leq \delta_\mu(z)$, soit par composition $y \leq \delta_\mu \delta_\lambda(x)$, et finalement $\delta_{\lambda+\mu} \leq \delta_\lambda \delta_\mu$, ce qui achève la démonstration. ■

Revenant maintenant à la proposition 8 de Choquet, il suffit de remarquer que, comme l'existence de géodésiques est une propriété plus forte que celle d'un bon enchaînement de l'espace, les dilatations vérifiant le semi-groupe 12

permettent d'extraire les composantes connexes, sous réserve qu'elles ne mettent en jeu que des distances finies.

On voit facilement, de plus, que quand le treillis métrique est *discret*, le bon enchaînement équivaut à la présence de géodésiques. Dans ce cas, par conséquent, les dilatations de semi-groupe 12 sont les seules capables d'extraire les composantes connexes par arcs.

8 Géodésies et connexions digitales

Dans ce qui précède, nous avons exploré diverses approches métriques en mettant en regard la connexité topologique (dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$) ou par arcs (dans $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^n)$). Or, en morphologie mathématique, beaucoup d'opérateurs relèvent de la notion plus générale de connexion sur $\mathcal{P}(E)$, qui est définie comme suit [10].

Definition 11 *Etant donné un espace quelconque E, on appelle connexion sur $\mathcal{P}(E)$ toute classe $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$ vérifiant les trois axiomes suivants*

i/$\mathcal{C}$ contient l'ensemble vide : $\emptyset \in \mathcal{C}$

ii/ $\mathcal{C}$ contient les singletons : $x \in E \Rightarrow \{x\} \in \mathcal{C}$

iii/ la réunion de toute famille d'éléments de $\mathcal{C}$ d'intersection non vide appartient encore à $\mathcal{C}$: $\{A_i \in \mathcal{C}\}$, $\cap A_i \neq \emptyset \Rightarrow \cup A_i \in \mathcal{C}$

Chaque ensemble $A \subseteq E$ est partitionné en ses composantes connexes, de sorte que ces dernières apparaissent comme les invariants d'une famille $\{\gamma_x, x \in E\}$ d'ouvertures dites connexes et ponctuelles, telles que pour tous $\{x,y\} \in E$ et tout $A \subseteq E$, l'on a

- $\gamma_x(x) = \{x\}$
- $\gamma_x(A) = \gamma_y(A)$ ou sinon $\gamma_x(A) \cap \gamma_y(A) = \emptyset$
- $x \notin A \Rightarrow \gamma_x(A) = \emptyset$

Inversement, la donnée d'une famille d'ouvertures associées à chaque point de E et qui vérifient ces trois propriétés caractérise une connexion unique ([10], théorème 2.8).

La notion de connexion est trop générale pour que l'on espère étendre tous les résultats qui précèdent. Par exemple, si $\triangle$ étant une partition donnée de E, de classes D(x), si l'on prend pour connexion la famille

$$\mathcal{C} = \{D(x) \cap A, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)\} \cup \emptyset$$

et pour métrique la distance euclidienne, l'existence d'érodés ultimes n'est pas assurée : il suffit que certaines classes D(x) soient topologiquement ouvertes. Pour cette raison, nous nous limitons aux métriques discrètes, tout en conservant à E sa généralité, ce qui signifie que les distances étudiées appliquent E $\otimes$ E dans $\mathbb{Z}_+$.

Les relations entre métrique et connexion peuvent s'envisager sous deux formulations réciproques selon qu'on se demande dans quelle mesure une métrique induit une connexion ou inversement.

La réponse à la première question est apportée par la proposition suivante, de Ch. Ronse et J. Serra [11][9].

Proposition 12 *Soit $\alpha : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, une dilatation extensive et symétrique, et soient $x \in E$ et $A \in \mathcal{P}(E)$. Alors l'itérée limite*

$$\gamma_x(A) = \cup \left\{ (\alpha(x) \cap A)^{(n)}, \quad n > 0 \right\} \tag{13}$$

vue comme opération sur A est une ouverture connexe ponctuelle.

On notera qu'il n'est pas nécessaire d'avoir préalablement doté $\mathcal{P}(E)$ d'une connexion. Ainsi, même si l'on fait abstraction de toute connexité par arcs, les dilatations selon les boules unité de $\mathbb{R}^n$, telles que carré, cube, hexagone, etc ... *engendrent* les connexions dont elles servent à extraire ensuite les composantes connexes. Mais la proposition 11 va plus loin, puisqu'elle étend cette propriété à toute dilatation extensive et symétrique. On peut même remplacer "dilatation" par "opération croissante".

Examinons maintenant la question réciproque, et demandons-nous comment une connexion donnée $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{P}(E)$ peut y induire une métrique. A tout point x de E, associons la classe $\mathcal{C}(x)$ des composantes connexes contenant x et dont l'intersection avec tout ensemble $A \subseteq E$ contenant x est elle-même connexe

$$\mathcal{C}(x) = \{C : x \in C \in \mathcal{C};\ x \in A \subseteq E \ \Rightarrow\ \gamma_x(A) \cap C \in \mathcal{C} \backslash \emptyset\}$$

Cette classe n'est pas vide, puisqu'elle contient le singleton $\{x\}$. Comme elle est manifestement stable pour la réunion, elle admet un élément maximal $\delta(x)$. Pour entrer dans les conditions de la proposition 11, nous devons symétriser δ, c'est à dire le remplacer par

$$\alpha(x) = \delta(x) \cap \check{\delta}(x) \quad \text{où} \quad \check{\delta}(x) = \{y : x \in \delta(y)\}$$

Comme $x \in \delta(x)$, il appartient aussi à $\check{\delta}(x)$ et $\alpha(x)$, connexe, est par conséquent un élément de $\mathcal{C}(x)$. La relation 13, appliquée à la dilatation d'élément structurant $\alpha(x)$ conduit alors à une nouvelle ouverture ponctuelle, disons γ_x^*, qui caractérise une nouvelle connexion $\mathcal{C}^*$. Comme $\alpha(x) \in \mathcal{C}(x)$, on a pour tout A contenant x

$$\{x\} \subseteq [\alpha(x) \cap A]^{(n)} \subseteq A$$

d'où $\gamma_x^*(A) \subseteq \gamma_x(A)$, sans toutefois que l'égalité soit assurée. Si on prend par exemple pour E la droite digitale achevée, pour $\mathcal{C}$ la connexion par arcs, et pour A un ensemble connexe contenant un point à l'infini, A reste inacessible à tout marqueur à coordonnées finies. En résumé, on peut énoncer

Proposition 13 *Toute connexion $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{P}(E)$,où E est un espace arbitraire, induit sur $\mathcal{P}(E)$ une plus grande dilatation connexe symétrique et extensive, qui à son tour (prop. 12) engendre une connexion $\mathcal{C}^*$ moins riche que $\mathcal{C}$.*

On peut présenter les choses autrement, et remarquer que $\mathcal{C}^*$ est le sous-ensemble expérimentalement accessible de la connexion $\mathcal{C}$. Il arrive d'ailleurs que les composantes de $\mathcal{C}^*$, ou de $\mathcal{C}$, soient atteintes dès la première étape de

dilatation α, quand $\alpha^{(2)} = \alpha$. Par exemple, si l'on reprend la connexion citée plus haut, qui est induite par intersection des classes $D(x)$ d'une partition fixe $\triangle$, on trouve pour tout point $x \in E$

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \overset{\checkmark}{\delta}(x) = \alpha(x) = D(x) = \alpha^{(n)}(x) \\ \gamma_x^*(A) &= \gamma_x(A) = A \cap D(x) \end{aligned}$$

et si deux points de A sont deux classes différentes de la partition, leur écart est infini.

9 Exemples de métriques géodésiques digitales

De ce qui précède, il ressort que la structure de semi-groupe $\delta_\gamma \delta_\mu = \delta_{\lambda+\mu}$ reste incontournable. Mais fort heureusement, on peut construire nombre de familles $\{\delta_\lambda\}$ qui la vérifient. En voici quelques-unes, à deux et trois dimensions. On rappelle que dans les espaces discrets, le semi-groupe 12 équivaut à

$$\delta_n = (\delta_1)^n$$

mais que $\delta_1(x)$ peut changer de forme d'un point à un autre.

Métriques de grilles régulières : ce sont celles où précisément $\delta_1(x)$ ne change pas de forme, i.e. commute avec les translations selon les vecteurs d'une grille régulière. Dans $\mathbb{R}^2$ on peut ainsi construire le carré unité symétrique de 9 points ou de 5 (diamant) ou l'hexagone de 7 points. Dans $\mathbb{R}^3$ les trois grilles les plus courantes, et que nous avons rencontrées plus haut, admettent pour boules unité le cube (27 points), le cylindre à base hexagonale (21 points) et le cube-octaèdre (13 points), la plus fine et la plus isotrope des trois étant la dernière.

Métriques géodésiques d'un premier masque : En pratique, les métriques précédentes ne servent que lorsque l'objet d'étude est inclus dans le masque rectangulaire d'analyse Z, disons, ce qui n'arrive pas très souvent. La plupart du temps, au contraire, le masque a découpé une région dans un champ plus vaste et, pour rendre compte de cet effet de bord, on remplace $\delta_1(x)$ par $\delta_1(x) \cap Z$. La même construction s'applique lorsque Z est un ensemble quelconque connu, comme nous l'ont montré les exemples des sections 3 et 5. Il n'est d'ailleurs pas interdit d'itérer, une première géodésique servant de métrique initiale pour en construire une seconde.

Dilatations non unitaires : Prenons maintenant comme boule unité le dilaté δ_n de taille n de la dilatation isotrope unitaire de la grille, i.e. le carré 3 x 3, ou le cube-octaèdre de 13 voxels, par exemple. La précédure équivaut à un changement de connexion où la connexité par arcs est remplacée par celle selon les δ_n. Cela veut dire que la composante contenant un point x donné n'est plus un objet d'un seul tenant, mais un groupe d'objets dont le dilaté par δ_n est, lui d'un seul tenant.

Cette géodésie non unitaire risque de faire gagner un temps non négligeable dans les procédure tridimensionnelles. Pour connaître la composante connexe par arcs Ax d'un ensemble donné A qui contient un point x, donné lui aussi, on peut commencer par éroder A par δ_n, puis reconstruire l'érodé en prenant δ_n pour boule unité, et enfin partir de cette reconstruction pour atteindre Ax par dilatations géodésiques $\delta_1 \wedge I$. Pour des diamètres de A grands devant n le temps de calcul est asymptotiquement divisé par n.

Sections et projections : Comme nous l'avons vu à propos des bifurcations du rein, la projection de la pile des sections perpendiculairement à leur plan peut servir de marche-pied à une analyse tri-dimensionnelle. En particulier, la propriété d'être une composante connexe se conservant par projection (sans toutefois que la réciproque soit vraie !), si l'on projette l'ensemble A et le point x dans $\mathbb{R}^2$, soit A_0 et x_0, la composante connexe de A_0 qui contient x_0 est la base d'un cylindre de génératrice la direction projetante, disons verticale, et qui contient Ax.

Au-delà des procédures de projections, il n'est pas difficile de déceler, ici encore, des dilatations non unitaires et les connexions qui les accompagnent. Mais ici, seuls les points alignés verticalement peuvent être regroupés. L'exemple suivant illustre clairement cet aspect des choses.

La séquence à étudier comprend 57 images numériques de format 512 x 512 sur 8 bits. Elles proviennent de l'examen d'un même champs de tissus osseux, vu en microscopie confocale, avec un pas digital d'un micron. Dans ce petit volume d'os, on distingue trois ostéocytes, situés à des profondeurs différentes. Sur les deux coupes de la fig. 17, apparaissent les noyaux et partiellement, les longues fibres du cytoplasme de ces cellules, que l'on se

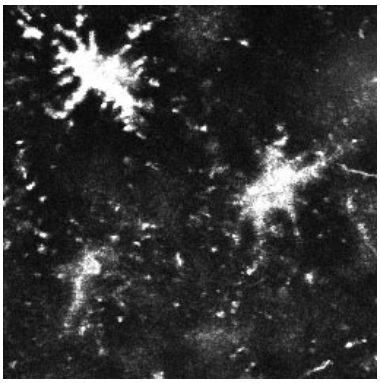

Fig.17a: coupe n°15

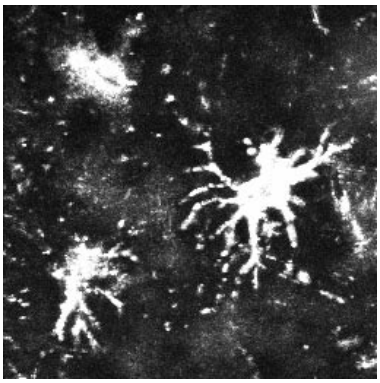

Fig.17b: coupe n° 35

propose de de segmenter. Le supremum des 57 coupes (fig. 18a) après un filtrage qui ne conserve que les trois projections les plus grosses, conduit à la fig. 18b où apparaissent les trois projections, connexes et disjointes, des ostéocytes.

Si on les interprète comme les bases des cylindres projetants, il suffit ensuite de restreindre chacune des 57 sections à ces trois zones, pour extraire les trois cellules. C'est ce que montre la fig. 19

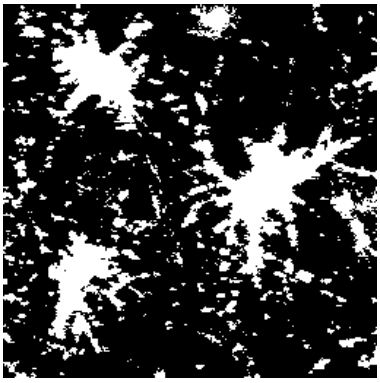

Fig.18a: supremum

Fig.18b: supremum filtré

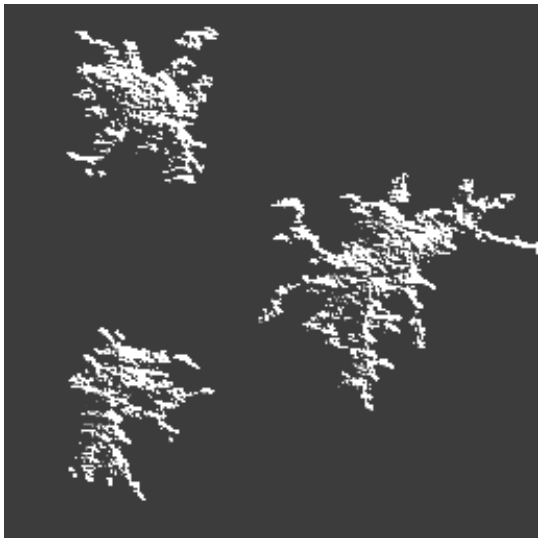

Fig.19: vue perspective des ostéocytes

En temes de géodésiques, ces opérations reviennent à se donner un segment vertical comme boule dilatante unitaire. Ce segment n'a pas pour taille un, mais une quinzaine de points environ (on ne parviendrait pas, sinon, à retrouver tout le cylindre). Sont alors considérés comme connexes les objets dont ce dilaté vertical est lui-même connexe par arcs, et ne sont retenus enfin que les trois objets les plus volumineux.

10 Conclusion

Ainsi, le même concept de front d'onde dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{Z}^n$ caractérise :
- les composantes connexes, par intégrale dans sa mesure
- les goulots d'étranglement, par les minima de sa variation,
- les branchements, par variation de sa connexité
- et les extrémités, par ses localisations ultimes,

et son application à des structures histologiques tridimensionnelles complexes confirme la puissance exceptionnelle de cet outil.

Chemin faisant, il est apparu qu'on avait parfois intérêt à jumeler les procédures portant sur des ensembles 3-D avec les versions 2-D de leurs sections planes ou de leurs projections (Ex : constante d'Euler Poincaré, bifurcation, extraction d'objets suffisamment séparés dans l'espace).

D'un point de vue théorique, les propriétés des fronts d'onde établissent des passerelles entre les trois familles de concepts, connexion, métrique et dilatation. Un semi-groupe additif de dilatations équivaut à une métrique admettant des géodésiques, et aussi à la caractérisation des composantes connexes compactes d'une connexion. Cette double équivalence ouvre le champ à un nombre à priori infini de possibilités, en fait, il semble que les connexions par dilatation soient les seules de cette généralisation à avoir des applications pratiques importantes.

Acknowledgement 14 *Je remercie le Dr J. Bertram d'une part, et le Dr Staub et M. M. Mendjeli de l'autre, des discussions que j'ai eues avec eux, et des données numériques qu'ils m'ont aimablement communiquées. Mes remerciements vont également à M. Ch. Bernard pour m'avoir fourni une démonstration de la convergence monotone séquentielle des compacts connexes. Je ne l'ai pas utilisée ici, mais le dialogue m'a relancé dans la rédaction de ce texte. Je remercie enfin M. G. Fricout : en abordant l'étude des arborescences rénales sous un autre angle, il m'a poussé à formuler mon point de vue avec une plus grande précision.*

References

[1] Bertram

[2] Choquet G. *Topologie* Masson Paris, 1966.

[3] Fricout G. Kiney and Skeletonization Int. report CMM, nov 2000

[4] Hadwiger H. *Vorselungen uber Inhalt, Operflache und Isoperimetrie.* Springer, Berlin, 1957;

[5] Klein J-C. *Conception et réalisation d'une unité logique pour l'analyse quantitative d'images.* Thesis, University of Nancy, 1976

[6] Lantuejoul C., Beucher S. On the use of the geodesic metric in image analysis. *J. of Microscopy.* Vol. 121, 1981, pp. 39-49.

[7] Matheron G. *Random Sets and Integral Geometry.*New York: Wiley, 1975.

[8] Meyer F. Rapport de stage note interne CMM, (1976)

[9] Ronse Ch., Serra J.Geodesy and connectivity in lattices (à paratre)

[10] Serra J. (ed.) *Image Analysis and Mathematical Morphology.* Vol. 2. : *Theoretical Advances.* Academic Press, London, 1988.

[11] Serra J. Connectivity on complete lattices, January 1996, 40 p. [N-04/96/MM]

[12] Serra J. Cube, cube-octahedron or rhombododecahedron as bases for 3-D shape descriptions", *Advances in Visual Form Analysis, C. Arcelli and Al. (eds.)* World Scientific 1997, 502-519.

[13] Staub

11 Table des matières

1/ Contexte expérimental : microscopie tridimensionnelle

2/ Méthode : front d'ondes

3/ Application à l'arborescence de reins embryonnaires

4/ Intermède : la constante d'Euler-Poincaré

5/ diaphyse du tibia d'embryons de poulet

6/ Métrique et dilatations

7/ Connexité, géodésiques et semi-groupe $\delta_{\lambda+\mu} = \delta_\lambda + \delta_\mu$

8/ Géodésie et connexions digitales

9/ Exemples de métriques géodésiques digitales

10/ Conclusion

11/ Bibiographie