

Connexité et Segmentation

Exposé à la journée ISS du 5 février 1998

Jean SERRA

Ecole des Mines de Paris

La connexité en mathématiques

- **Connexité topologique** : E étant un espace topologique, $A \subseteq E$ est connexe si on ne peut pas le partitionner en deux fermés non vides.
- **Deux théorèmes** :
 - 1 - $\{A_i\}_{i \in I}$ famille de connexes
 $\{ \bigcap A_i \neq \emptyset \} \Rightarrow \{ \bigcup A_i \text{ connexe} \}$
 - 2 - $\{ A \text{ connexe, } \psi \text{ application continue} \} \Rightarrow \{ \psi(A) \text{ connexe} \}$.
- **Connexité par arcs** (plus utile quand $E = \mathbb{R}^n$) : A est connexe par arcs si il existe une application continue f pour tout couple $a, b \in A$ avec

$$[\alpha, \beta] \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f(\alpha) = a ; f(\beta) = b$$

Pour les ouverts de \mathbb{R}^n , les deux définitions sont équivalentes.

Critiques

La connexité topologique est-elle adaptée à l'analyse d'image ?

- Chaque topologie impose une connexité **unique**, or
 - Le plan discret du traitement d' image est doté des 4- 6- et 8-connexités;
- les sections planes (objets 3D) ou l'échantillonnage (séquences) ont tendance à **disconnecter** les objets ou les trajectoires, la connexité topologique n'aide pas beaucoup pour les reconnecter;
- Plus généralement, une bonne définition en traitement d'image doit être **opératoire**, i.e. introduire des opérations spécifiques;
- Enfin la définition topologique est purement ensembliste, et l'on aimerait pouvoir exprimer la connexité aussi pour les **fonctions**...

Treillis et sup-générateurs

- Un point commun aux ensembles $\mathcal{P}(E)$ (E espace quelconque) et aux fonctions $f: E \rightarrow T$ (T , échelle des gris) est qu'ils forment tous deux des **treillis complets et «bien» supgénéérés**.
- Un **treillis complet** \mathcal{L} est un ensemble partiellement ordonné où toute famille $\{a_i\}_{i \in I}$ d'éléments admet
 - un plus petit majorant $\bigvee a_i$, et un plus grand minorant $\bigwedge a_i$.
- Une famille \mathcal{B} dans \mathcal{L} constitue classe **sup-génératrice** quand tout $a \in \mathcal{L}$ s'écrit $a = \bigvee \{b ; b \in \mathcal{B}, b \leq a\}$.
- Dans $\mathcal{P}(E)$ - les \bigvee et \bigwedge deviennent la réunion et l'intersection;
 - les éléments de E , i.e.les points, sont sup-générateurs

Treillis des fonctions numériques

- Pour éviter la distinction continu/digital, les droites \bar{R} , \bar{Z} , ou l'un quelconque de leur sous-ensembles compacts sont notés T . L'axe T est un treillis totalement ordonné d'éléments extrêmes 0 et m .

- Les fonctions $f : E \rightarrow T$, E espace arbitraire, forment un **treillis** totalement distributif, que l'on note T^E , pour l'ordre produit

$$f \leq g \quad \text{ssi} \quad f(x) \leq g(x) \quad \text{pour tout } x \in E ,$$

Dans ce treillis, le \vee et l' \wedge , dits numériques, sont définis par :

$$(\vee f_i)(x) = \vee f_i(x) \quad (\wedge f_i)(x) = \wedge f_i(x) \quad x \in E .$$

- De plus, dans T^E les fonctions **impulsions** :

$$k_{x,t}(y) = t \quad \text{si} \quad x = y \quad ; \quad k_{x,t}(y) = 0 \quad \text{si} \quad x \neq y \quad ,$$

sont **sup-génératrices**, *i.e.* tout f s'écrit sous la forme $f = \vee k_{x,t}$ pour des $x \in E$ et des $t \in T$ convenables.

Connexion sur un treillis

Laissant tomber tout contexte topologique, prenons pour point de départ l'une des conséquences de la connexité topologique qui, elle, ne nécessite que le cadre des treillis.

- **Connexion** : Soit \mathcal{L} un treillis complet. Une classe $C \subseteq \mathcal{L}$ est une **connexion** sur \mathcal{L} quand

(i) $\mathbf{0} \in C$;

(ii) C est **sup-génératrice** ;

(iii) C est **conditionnellement stable** pour le supremum, *i.e.*

$$h_i \in C \text{ et } \bigwedge h_i \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \bigvee h_i \in C .$$

- Ainsi, les points appartiennent à toutes les connexités possibles sur $\mathcal{P}(E)$ et les impulsions à toutes celles sur les fonctions.

Exemples de Connexions

La démarche proposée rassemble en une *axiomatique unique* les diverses acceptions du concept de connexité, plus de nouvelles:

- En imagerie digitale, les composantes connexes au sens des 4- et 8- connexités (*carré*), 6-connexité (*hexagone*) 12- connexité (*cube-octahédre*), constituent quatre connexions différentes.
- En mathématiques, les connexités *topologique* et *par arc* engendrent des connexions.
- Les *connexions de seconde génération* (cf. plus bas) sont des notions qui permettent de considérer les groupes d'objets disjoints comme connexes.
- Les zones plates des fonctions sont des connexions.

Ouverture connexe

- **Ouverture connexe** : Soit C connexion sur un treillis \mathcal{L} . Pour tout $s \in C$, l'opération $\gamma_s: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ définie par

$$\gamma_s(\mathbf{f}) = \vee (\mathbf{p} \in C, s \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{f}) \quad \mathbf{f} \in \mathcal{L},$$

est une ouverture :

- de **marqueur** s
- d'**invariants** $\{\mathbf{p} \in C, s \leq \mathbf{p}\} \cup \{0\}$.

De plus quand $r, s \in C$, $r \leq s$, alors $\gamma_r \geq \gamma_s$.

N.B. L'opération γ_s appartient à la classe des **ouvertures par reconstruction**, où chaque composante connexe est supprimée ou inchangée. Ces dernières ouvertures reposent également sur d'autres critères (surface, diamètres) que les seuls marqueurs.

Caractérisation d'une connexion

Inversement, les γ_s induits par la connexion C la **caractérisent** :

- **Connexion induite** : Soit C une famille sup-génératrice dans un treillis \mathcal{L} . La classe C **définit une connexion** ssi elle coïncide avec les invariants d'une famille d'ouvertures $\{\gamma_s, s \in C\}$ telle que
 - (iv) pour tout $s \in C$, l'on ait $\gamma_s(\mathbf{s}) = \mathbf{s}$,
 - (v) pour tout $f \in \mathcal{L}$, et tous $r, s \in C$, les ouverts $\gamma_r(f)$ et $\gamma_s(f)$ soient identiques ou disjoints, *i.e.*

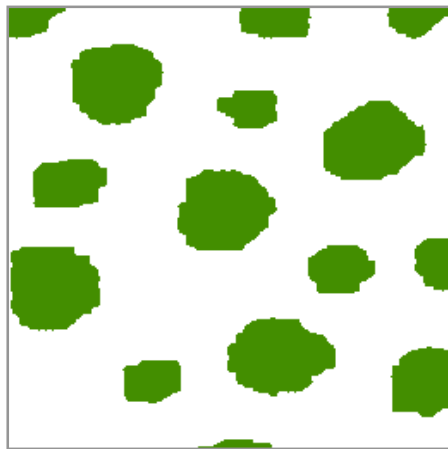
$$\gamma_r(\mathbf{f}) \wedge \gamma_s(\mathbf{f}) \neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \gamma_r(\mathbf{f}) = \gamma_s(\mathbf{f}),$$

$$(vi) \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{L}, \text{ et tout } s \in C, \mathbf{s} \not\leq \mathbf{f} \Rightarrow \gamma_s(\mathbf{f}) = \mathbf{0}$$

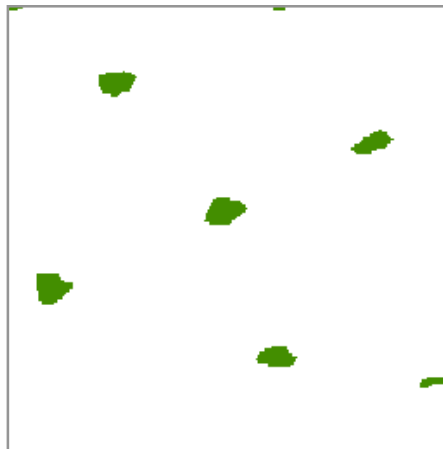
- **Segmentation optimale** : la famille des composantes connexes maximales $\leq f$, $f \in \mathcal{L}$, **partitionne** f en éléments de $\gamma_s(f)$, et l'on ne peut pas segmenter f avec **moins** d'éléments de C .

Exemple I : Erosion-Reconstruction

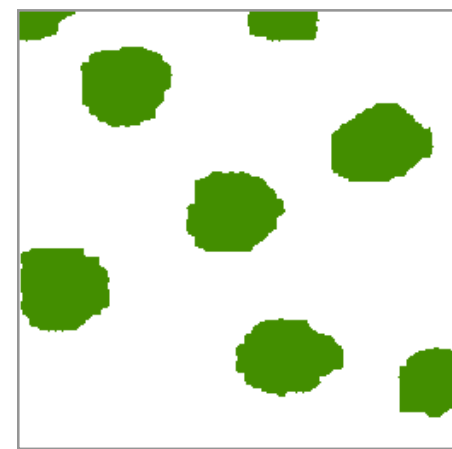
- L'érosion $X \ominus B_\lambda$ supprime les composantes connexes de X qui ne peuvent pas contenir un disque de rayon λ .
- L'ouverture $\gamma^{\text{rec}}(X; Y)$ de marqueur $Y = X \ominus B_\lambda$ reconstitue ensuite toutes les autres.



a) image initiale



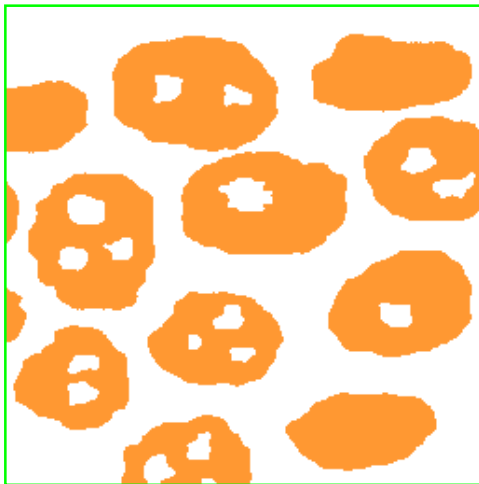
*b) érodé de a)
par un disque*



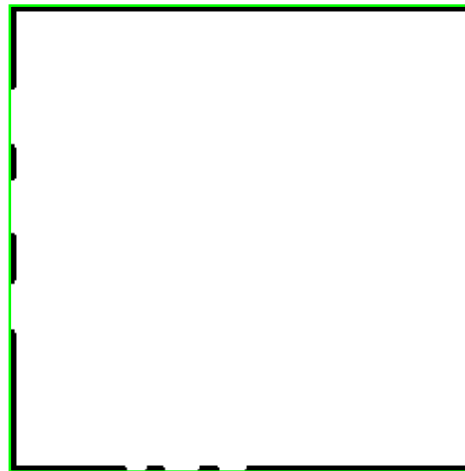
*c) reconstruction
de b) dans a)*

Exemple II : Bouchage des trous

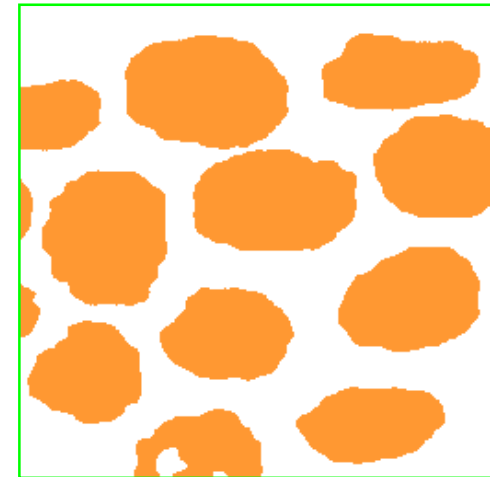
N.B. : *Algorithme rapide et efficace sauf pour les trous qui coupent les bords du champ.*



*Image initiale
 X*



*Marqueur A :
bords du champ
qui rencontrent X^C*



*Reconstruction
de A dans X^C
(en blanc)*

Propriétés des connexions

- **Treillis des connexions** : L'ensemble des connexions contenant la classe sup-génératrice S forme un treillis complet, où
$$\inf \{C_i\} = \cap C_i \quad \text{et} \quad \sup\{C_i\} = C\{\cup C_i\}$$
- **Dilatations connexes** : Soit une connexion C et $S \subseteq C$ une classe sup-génératrice. Si une dilatation extensive δ préserve la connexité sur S , elle la préserve aussi sur C .
 - Ex: dans $\mathcal{P}(E)$, quand le dilaté (extensif) des points est connexe, celui de toute composante connexe l'est aussi.
- **Corollaire** : L'érosion et l'ouverture adjointes à δ traitent les composantes connexes de tout $a \in \mathcal{L}$ indépendamment les une des autres.

Connexion de seconde génération

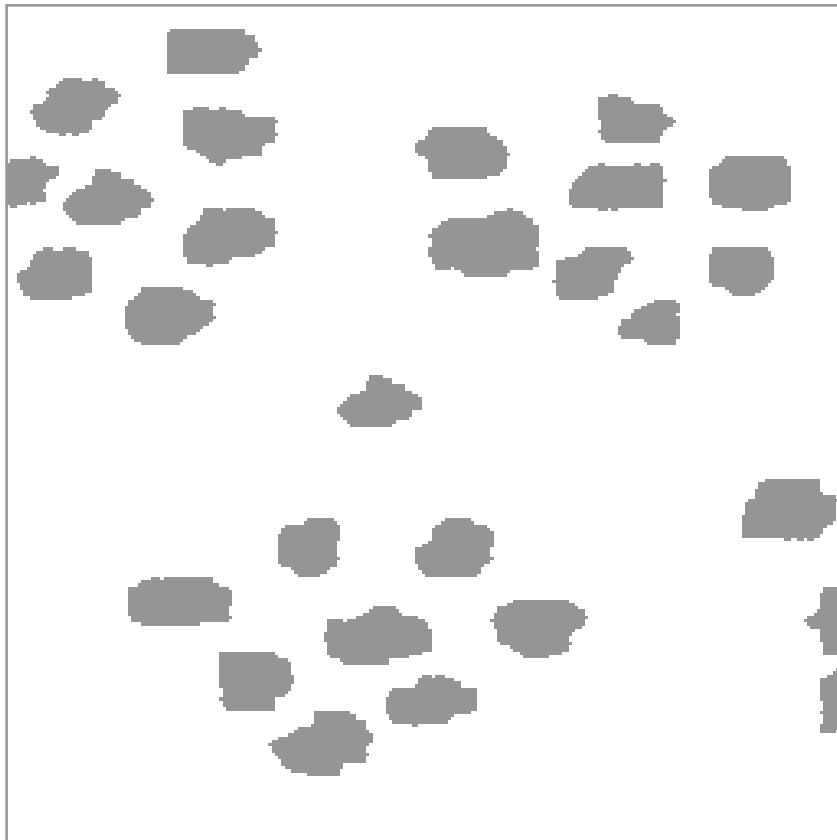
Nous allons maintenant utiliser la dilatation pour créer une nouvelle connexion C' à partir d'une ancienne C , d'ouverture γ_x

- **Images inverses**: Soit $\delta: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ une dilatation extensive et qui préserve la connexion C . Alors l'image inverse $C' = \delta^{-1}(C)$ est à son tour une **connexion** sur \mathcal{L} , avec $C' \supseteq C$.
- **Ouverture connexe**: Si, de plus, \mathcal{L} est infiniment \vee -distributif, alors les C -composantes de $\delta(a)$ sont exactement les **images des C' -composantes** de a . L'ouverture v_x de C' vaut

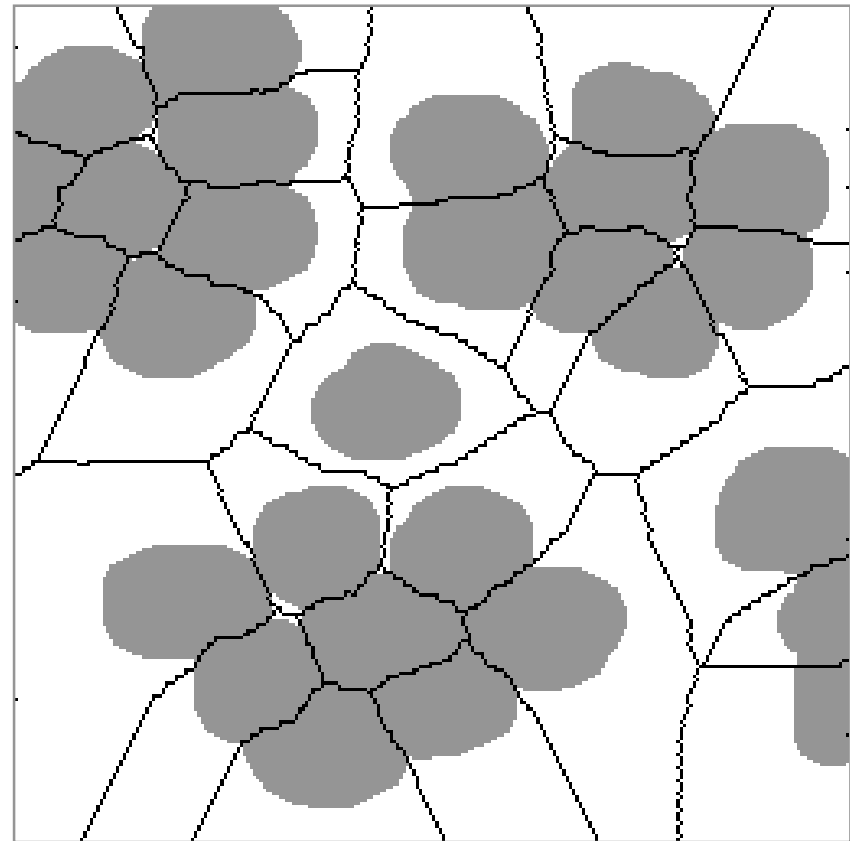
$$\begin{aligned} v_x(\mathbf{a}) &= \gamma_x \delta(\mathbf{a}) \wedge \mathbf{a} && \text{si } \mathbf{x} \leq \mathbf{a} \quad ; \\ v_x(\mathbf{a}) &= 0 && \text{sinon .} \end{aligned}$$

Recherche d'objets isolés

Commentaire: On veut trouver les particules distantes de plus de 20 pixels des autres.
Ces objets isolés ont un dilaté de taille 10 qui ne rencontre pas le SKIZ de l'image initiale



a): Image Initiale

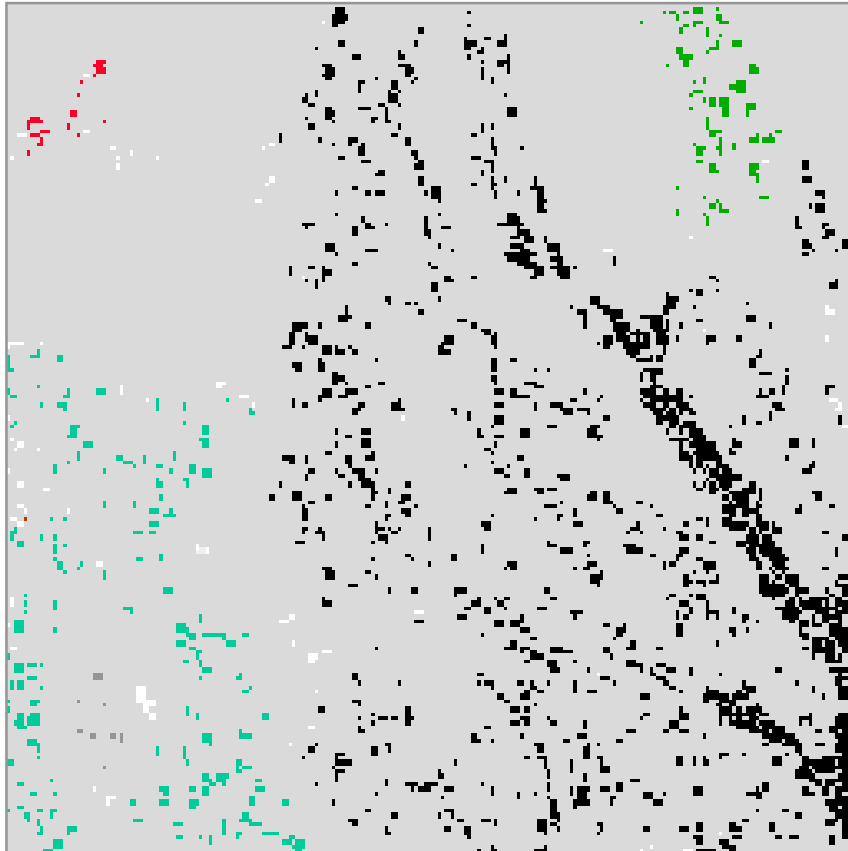


b) : SKIZ et dilaté de a) par un disque de rayon 10.

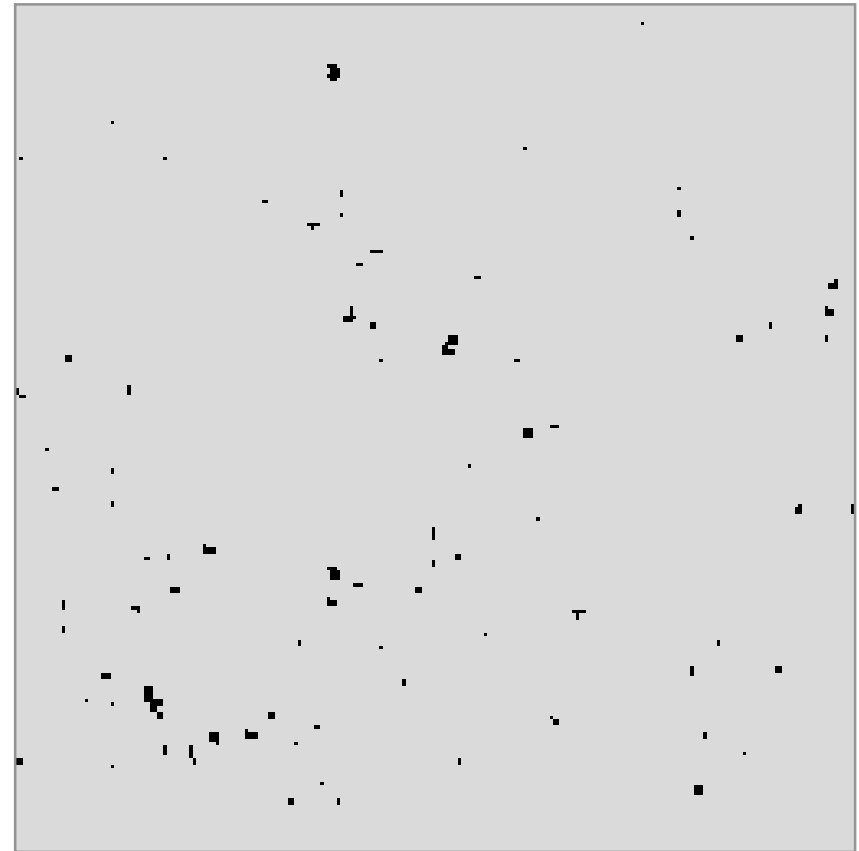


Les Maisons à Grand Jardin dans Nice

Commentaire : *Détail de la carte précédente, où l'on veut connaître les composantes de la connexité par dilatation, et, parmi elles, celles qui sont aussi connexes par arc .*

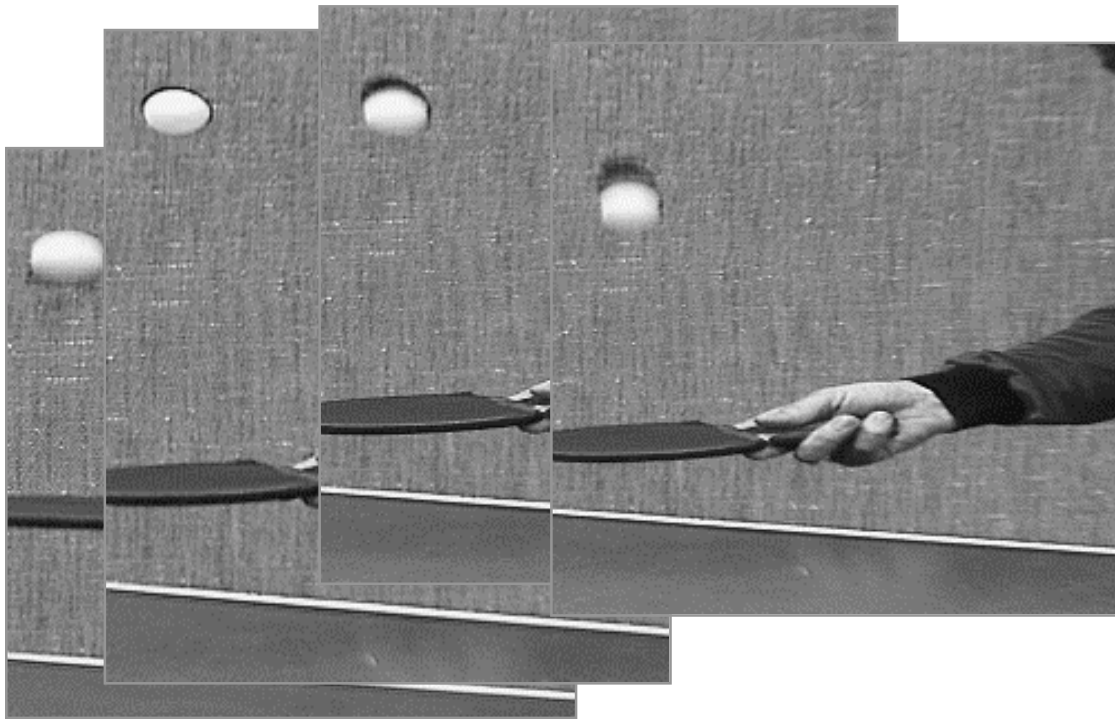


a : Composantes de la connexité par dilatation

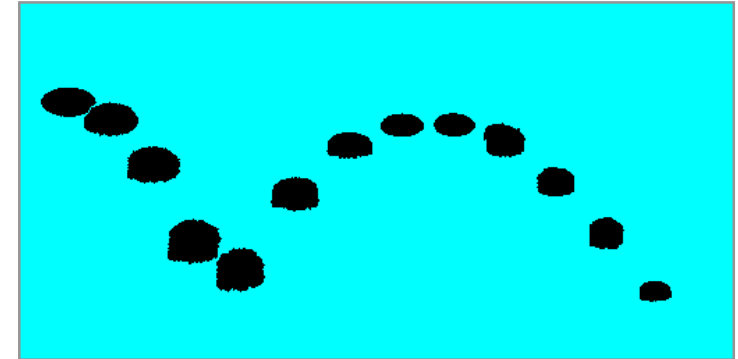


*b : Les composantes isolées de a)
(selon l'algorithme précédent)*

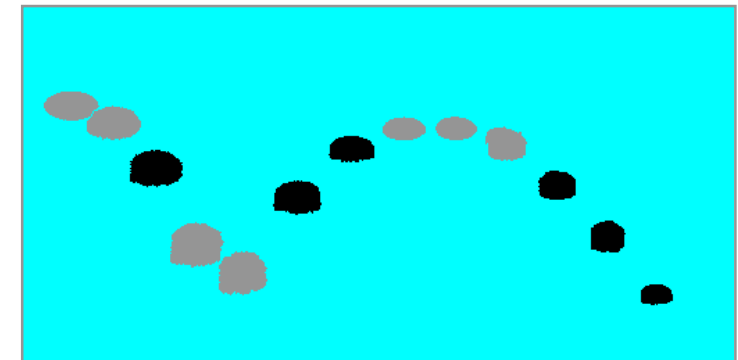
Connexions dans une Séquence



a) partie d'une séquence d'images



b) représentation de la balle de ping-pong dans le produit Espace \otimes Temps



Connexions obtenues par dilatation de taille 3 dans Espace \otimes Temps (en gris, les regroupements)

Connexité et reconstructions

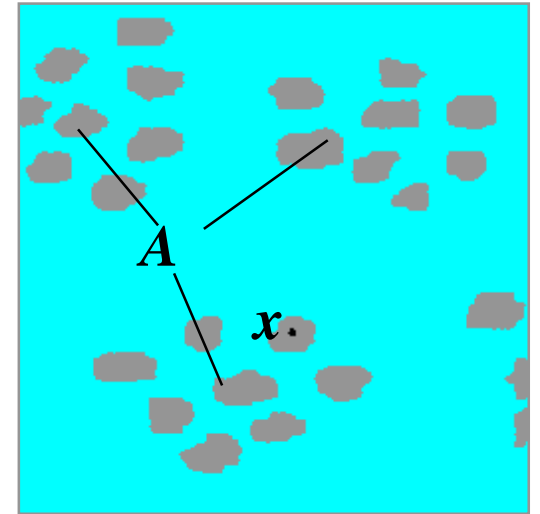
- On sait que quand le point x est un marqueur et A un ensemble, la dilatation géodésique infinie $\cup \delta_A^{(n)}(x)$ fournit l'ouverture connexe ponctuelle de A en x , *i.e.*

$$\gamma_x(A) = \cup \delta_A^{(n)}(x) \quad (1)$$

- Que se passe-t-il si nous remplaçons le disque unité δ par celui de rayon 10, par exemple, dans l'Eq.(1) ? Manifestement, on crée des **groupes** de particules. Mais:

1- Obtenons nous une *connexion nouvelle*, *i.e.* qui continue de **segmenter** l'ensemble A ?

2- Est-il nécessaire d'opérer par *dilatations* selon des *disques* ?



Géodesie et connexions

Curieusement, la réponse à ces questions dépend de propriétés de symétrie des opérateurs. Une application $\psi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ est *symétrique* quand on a

$$\mathbf{x} \subseteq \psi(\mathbf{y}) \iff \mathbf{y} \subseteq \psi(\mathbf{x})$$

pour tous les couples $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E$.

- **Proposition** : Soit $\delta: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ une dilatation extensive et symétrique, et soient $\mathbf{x} \in E$ et $A \in \mathcal{P}(E)$. Alors l'itérée limite

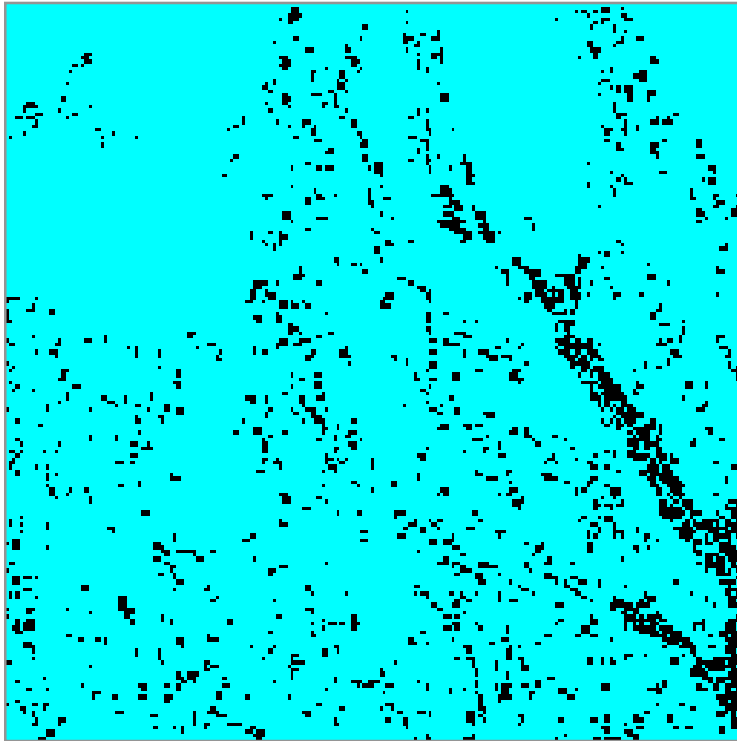
$$\gamma_{\mathbf{x}}(A) = \cup \{ \delta_A^{(n)}(\mathbf{x}), n > 0 \}$$

vue comme une opération sur A , est une **ouverture connexe ponctuelle**.

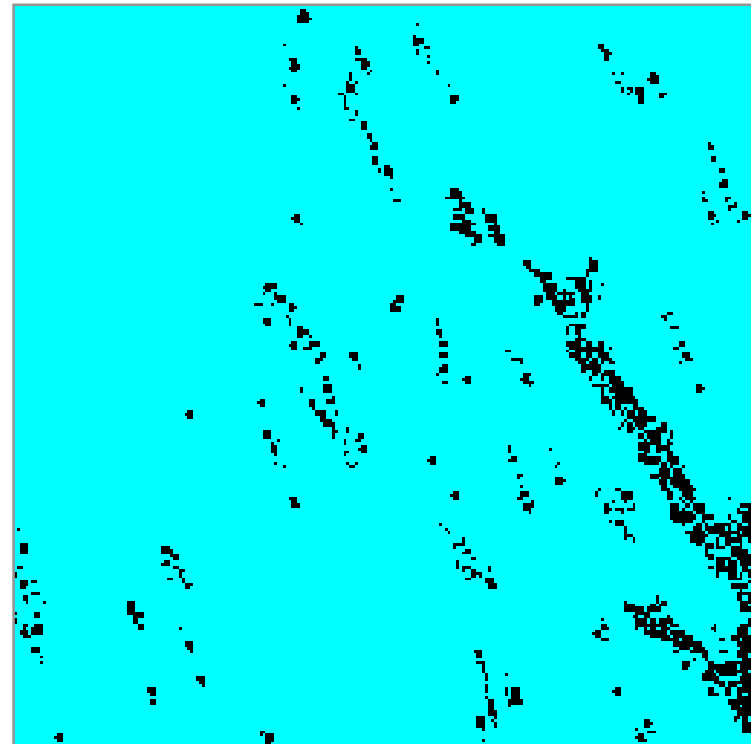
On notera que la dilatation de départ n'a pas besoin d'être elle-même connexe !

Exemple : alignements directionnels

Commentaire : Bien que l'élément D de la reconstruction ne soit pas connexe, il engendre une connexion nouvelle, dont on a gardé les plus grosses composantes



a) Zone d'étude A



b) Reconstruction de A à partir de $A \ominus 2B$ en utilisant l'élément $D =$  où chaque point est un hexagone unité

Treillis des fonctions équicontinues

- **Fonctions équicontinues:** E est un espace métrique discret ou continu, et $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue à l'origine. Une fonction $g : E \rightarrow T$ est dite équicontinue de module φ quand :

$$|g(x) - g(y)| \leq \varphi [d(x,y)] \quad (d = \text{distance dans } E)$$

On note G_φ la classe de ces fonctions .

- **Les sous treillis G_φ :** Pour tout φ , G_φ est un sous treillis complet de T^E . Ses éléments sont finis, à l'exception possible des deux extrema. De plus, tout G_φ :

- est auto-dual : $g \in G_\varphi \Leftrightarrow -g \in G_\varphi$
- contient toutes les fonctions constantes: $a = \text{cst} \Rightarrow a \in G_\varphi$
- est stable pour leur addition: $a = \text{cst}, g \in G_\varphi \Rightarrow a + g \in G_\varphi$

Quand T est fini, ces trois propriétés **caractérisent** les classes G_φ

Propriétés des classes équicontinues

Un élément structurant est une application δ qui à tout point $x \in E$ associe un compact non vide de $\mathcal{K}'(E)$. Supposons δ équicontinue pour la distance de Hausdorff, et de module φ'

- **Théorème** : l'image de G_φ , par la dilatation δ :

$$(\delta g)(x) = \bigvee \{ g(y) , y \in \delta(x) \} \quad x \in E$$

est la classe équicontinue de module $\varphi \circ \varphi'$; de plus, δ est continue.

- **Conséquences** :

- G_φ est stable pour l'addition de Minkowski et les dilatations standard
- il en va de même pour tous les filtres qui s'en déduisent.
- La continuité est remplacée par le changement de module, plus fin, régional, autodual, et valable aussi bien en continu qu'en digital.
- Les discontinuités viennent des variations brusques de δ et non de g .

Exemples de fonctions équicontinues

- Fonctions *constantes* :

$$\varphi = 0 ;$$

- Fonctions à *variation bornée* k :

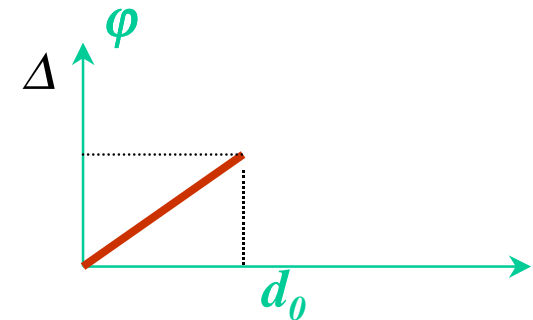
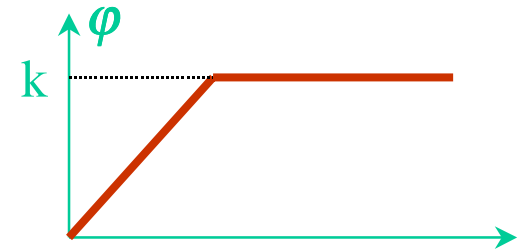
$$\forall d : \varphi(d) \leq k$$

- Fonctions de *Lipschitz* :

$$\varphi(d) = k \cdot d$$

- Fonctions de *Lipschitz géodésiques* :

$$d \leq d_0 \Rightarrow \varphi(d) = k \cdot d$$



Ensembles pondérés

Etant donné un module φ , associons à chaque paire (A, g) de l'espace produit $\mathcal{P}(E) \times G_\varphi$ la restriction g_A de $g \in G_\varphi$ à A , i.e. la fonction

$$g_A(u) = g(u) \quad \text{si } u \in A \quad ; \quad g_A(u) = 0 \quad \text{si } u \notin A .$$

La fonction indicatrice de l'ensemble A est remplacée par un poids g , non constant, où $g \in G_\varphi$. On dit que g_A est un **ensemble pondéré**. Quand le doublet (A, g) décrit $\mathcal{P}(E) \times G_\varphi$, l'espace engendré par les g_A se note $\mathcal{P}_\varphi(E)$.

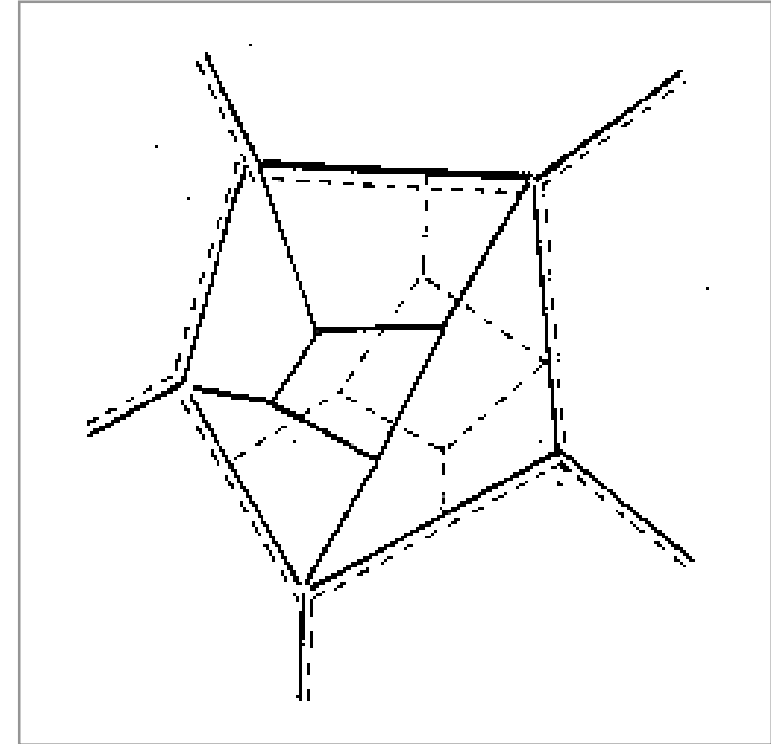
Treillis des ensembles pondérés: L'ensemble $\mathcal{P}_\varphi(E)$ constitue un treillis complet pour l'ordre numérique \leq ; dans ce treillis, le supremum $\sqcup (g_A)_i$ de toute famille $\{(g_A)_i, i \in I\}$ est le plus petit élément de G_φ qui majore $\vee (g_A)_i$ sur $\cup A_i$. L'infimum, plus simple, est donné par $\sqcap (g_A)_i = (\wedge g_i)_{\cap A_i}$.

Treillis des partitions

Partition : On appelle **Partition** d'un espace E toute application $D: E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ telle que

- (i) $\forall x \in E, \quad x \in D(x)$
- (ii) $\forall (x, y) \in E,$
soit $D(x) = D(y)$
soit $D(x) \cap D(y) = \emptyset$

- Les partitions de E forment un **treillis** \mathcal{D} pour l'ordre où $D \leq D'$ quand chaque classe de D est incluse dans une classe de D' . Le plus grand élément de \mathcal{D} est E lui-même, et le plus petit celui qui pulvérise E en la totalité de ses points.



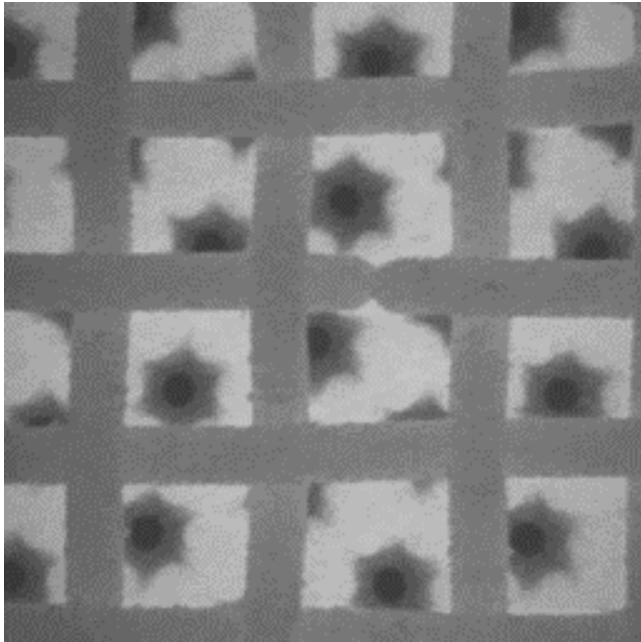
*Le **sup** des deux types de cellules est le pentagone où leurs frontières coïncident.*

*Leur **inf**, plus simple, s'obtient par intersection des cellules.*

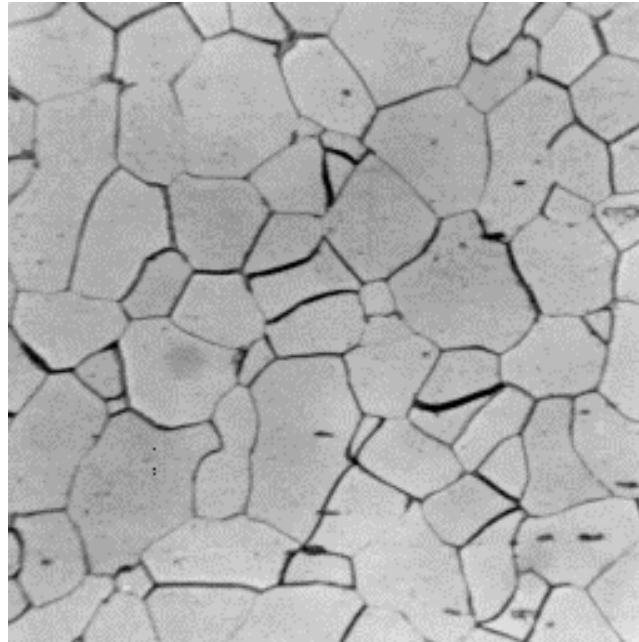
Partitions pondérées

- **Définition** : On nomme **partition pondérée** $x \rightarrow (g_D)_x$ toute une application Δ de $E \rightarrow \mathcal{P}_\varphi(E)$ telle que
 - (i) $\forall x \in E, \quad x \in D(x)$
 - (ii) $\forall (x, y) \in E, \quad \text{soit } (g_D)_x = (g_D)_y \quad \text{soit } (g_D)_x \wedge (g_D)_y = 0$
- La sous-application $x \rightarrow D(x)$ est une partition au sens usuel, *i.e.* $D \in \mathcal{D}$; et $f = \vee \{ (g_D)_x, x \in E \}$ est une fonction, *i.e.* $f \in T^E$. De sorte qu'on peut noter la partition pondérée $\Delta = (D, f)$.
- Toute fonction $f : E \rightarrow T$ peut se représenter de plusieurs manières sous forme de $\vee \{ (g_D)_x, x \in E \}$.
- Par exemple, quand $\varphi = 0$, tout sous ensemble de la zone plate de f qui contient le point x peut servir de classe $D(x)$, conjointement avec la fonction constante $g = f(x)$.

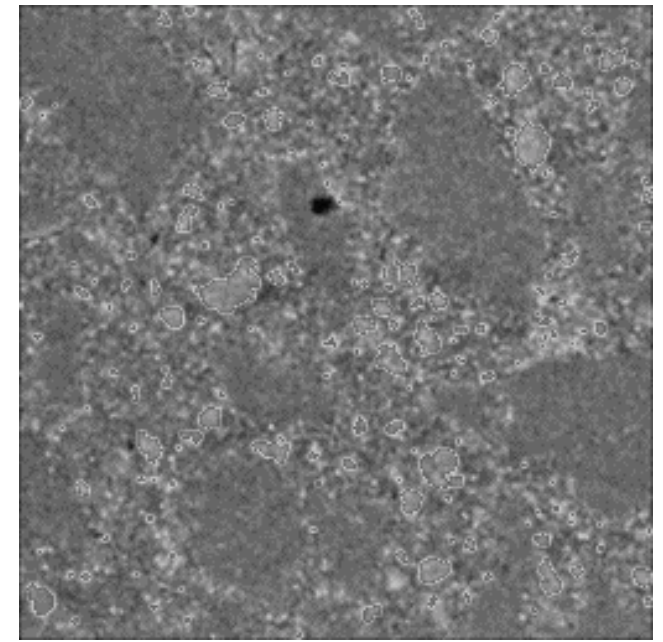
Exemples



*Brûleur de gaz
(Connexion par sauts)*



*Section polie de
grains d'alumine
(Connexion par sauts)*



*Micrographie de roche
(Connexion lisse)*

Treillis \mathcal{L} des partitions pondérées

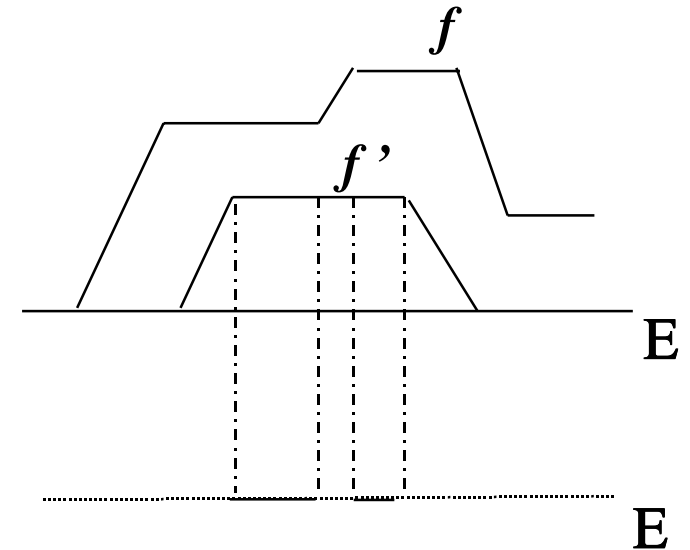
- **Treillis \mathcal{L}** : Soit \mathcal{L} l'ensemble des partitions pondérées. La relation

$$\Delta \leq \Delta' \Leftrightarrow \{ D \leq D' \text{ dans } \mathcal{D}, \text{ et } f \leq f' \}$$

définit un **ordre** sur \mathcal{L} auquel s'associe un **treillis complet**.

- **Sup et Inf** : Dans \mathcal{L} , le sup $\vee \Delta_i$ des $\{\Delta_i\}$ admet $D = \vee D_i$ pour partition. Dans chaque classe $D(x)$ de D , le poids g est la plus petite majorante φ -continue de $\vee (g_{D_i})_i$ sur $D(x)$. L'inf $\wedge \Delta_i$ est donné au point x , par la fonction $\wedge g_{D_i(x)}$ restreinte à $\cap D_i(x)$.

- **Extrema**: Δ_{\max} = classe unique E , poids m
 Δ_{\min} = tous les points de E , pondérés par 0.

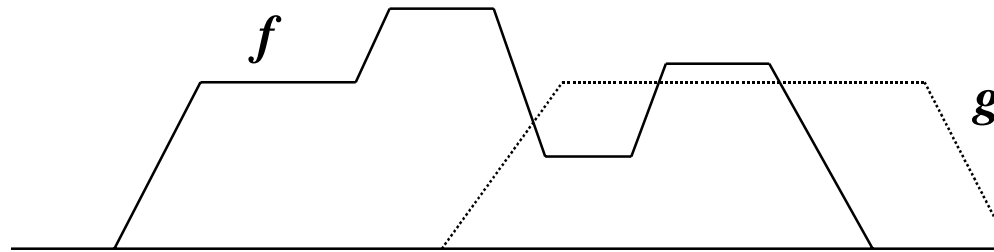


Pour $\varphi = 0$, partitions Δ et Δ' construites à partir des zones plates de f et de f' . Les deux partitions pondérées Δ and Δ' ne sont pas comparables dans \mathcal{L}

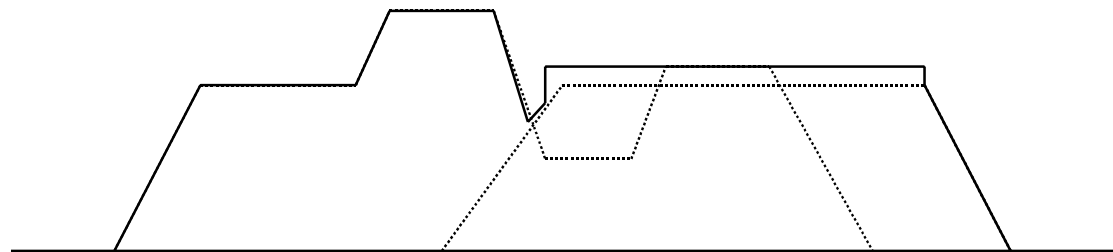
Leur inf est formé de deux zones plates dans f' et de 0 ailleurs.

Exemple de \vee et \wedge dans \mathcal{L}

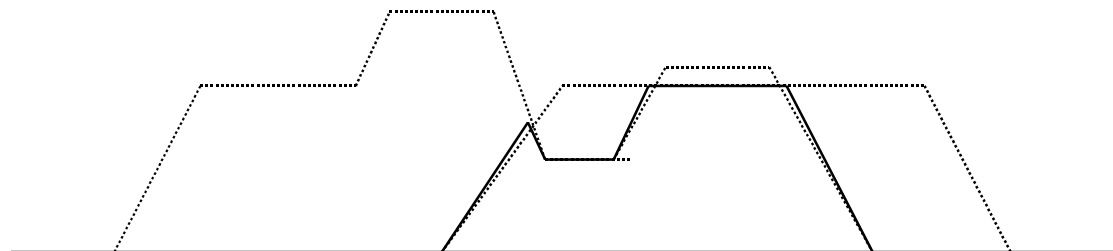
Commentaire : Les poids sont ici pris constants dans chaque zone plate de f et de f' , i.e. $\varphi = 0$. Ce qui engendre deux partitions pondérées Δ et Δ' .



a) Partitions pondérées Δ et Δ' qui sont non comparables.



b) Fonction associée au supremum $\Delta \vee \Delta'$



c) Fonction associée à l'infimum $\Delta \wedge \Delta'$

Cylindres dans \mathcal{L}

- **Cylindres** : On peut toujours associer à tout ensemble pondéré $g_A \in \mathcal{P}_\varphi(E)$, la partition pondérée Δ_A suivante

$$\begin{array}{ll} \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{g}_A & \mathbf{si} \ \mathbf{x} \in A \\ \mathbf{x} \rightarrow \{\mathbf{x}\} & \mathbf{si} \ \mathbf{x} \notin A . \end{array}$$

Δ_A est composée de la classe g_A plus d'une **pulvérisation de points**, tous pondérés par 0. on appelle une telle partition **cylindre, dans \mathcal{L} , de base A** .

- **Stabilité pour \vee** : Le supremum $\Delta_A = \vee \Delta_{A_i}$ d'une famille $\{\Delta_{A_i}\}$ de cylindres se partitionne en classes $\{\cup A_i, \text{ plus tous les } \{x\} \subseteq [\cup A_i]^c, \}$. Par conséquent Δ_A est lui même un cylindre.
- **Connexions sur E** : En particulier, quand E lui-même est doté d'une connexion, si des A_i sont connexes and si $\cap A_i \neq \emptyset$, alors $\vee \Delta_{A_i}$ est un cylindre de base connexe.

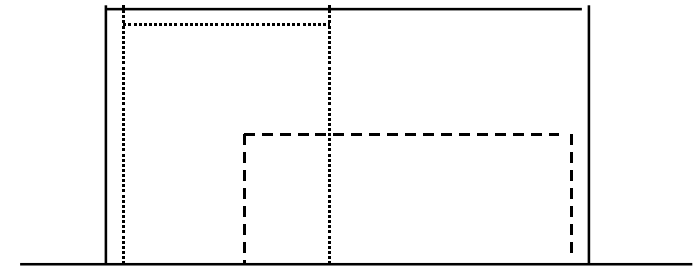
Connexions sur les partitions pondérées

Or, les cylindres, à base connexe sont **sup-générateurs** ; par conséquent

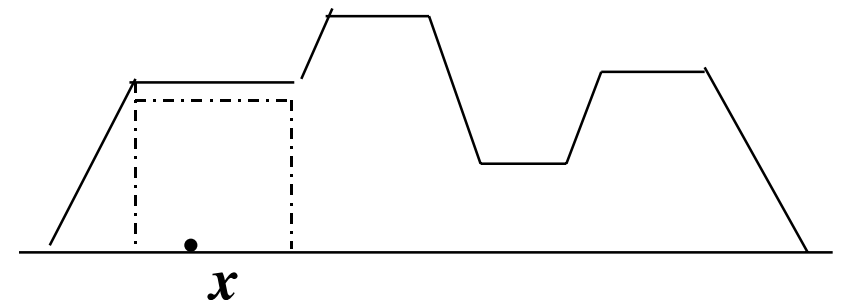
Proposition : Les cylindres Δ_C de base connexe C dans E , forment une **connexion** C sur \mathcal{L} .

l'ouverture ponctuelle $\gamma_x(\Delta)$ associée à la connexion C , et appliquée à partition pondérée $\Delta = (D, f)$, extrait le **cylindre** dont la base est la classe $D(x)$ de D qui recouvre le point x , et ayant pour poids les valeurs de f sur $D(x)$.

Exemple pour $\varphi = 0$



Le γ de cylindres est lui même un cylindre.



Dans \mathcal{L} , l'ouverture connexe au point x est un cylindre.

Typologie pour les connexions sur les fonctions numériques

Module φ

Modèle pour G_φ

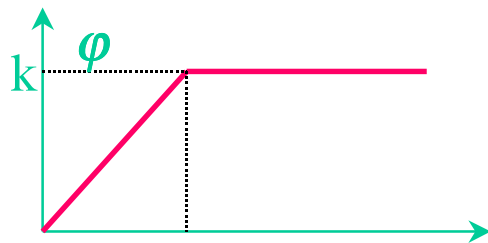
Signification pour f

1) $\varphi = 0$

Fonctions constantes

Zones plates

2) $\varphi(d) \leq k$

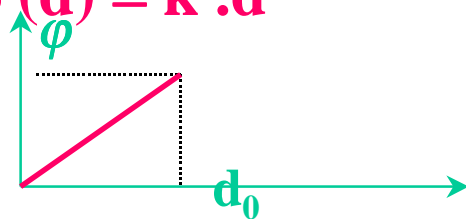


Fonctions à variation maximale = k

Zones dans lesquelles la variation de f est $\leq k$, et saute d'une zone à une autre

3) $d \leq d_0 \Rightarrow$

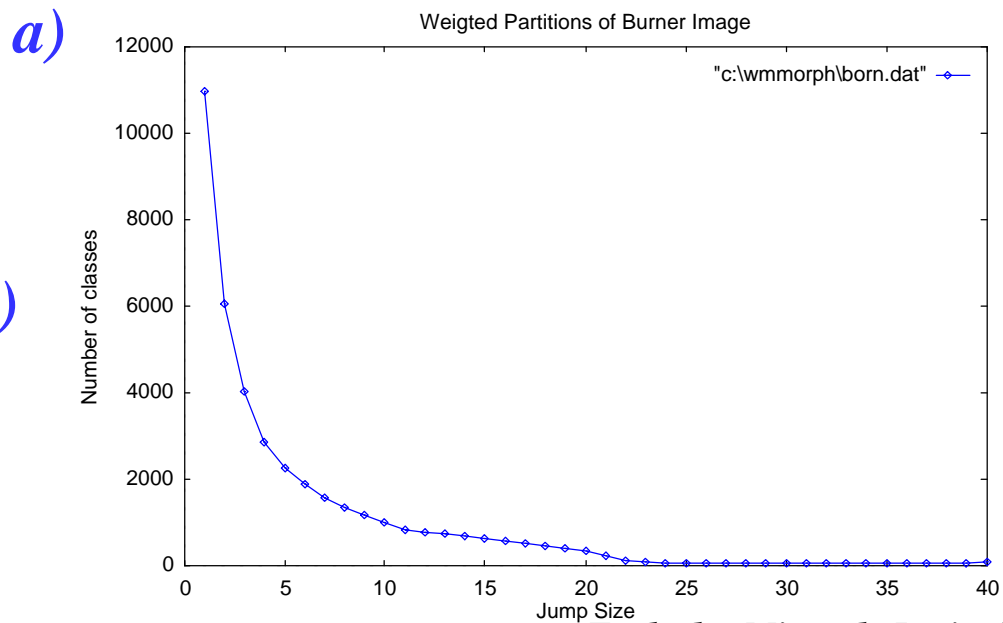
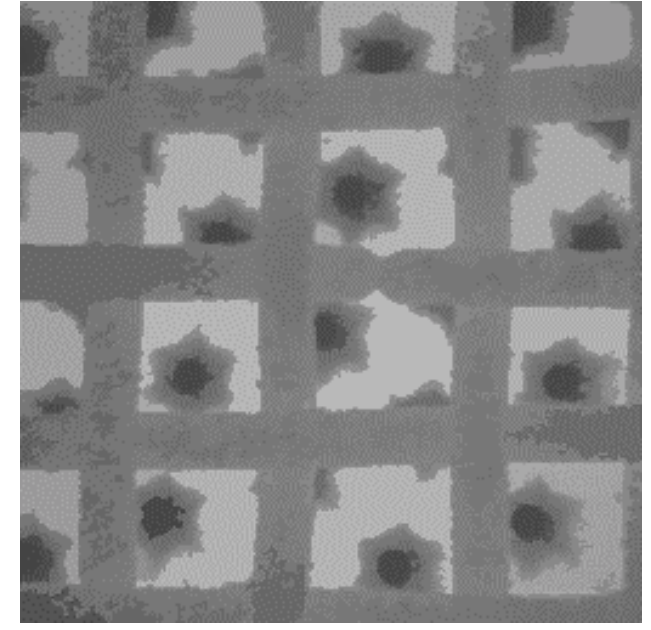
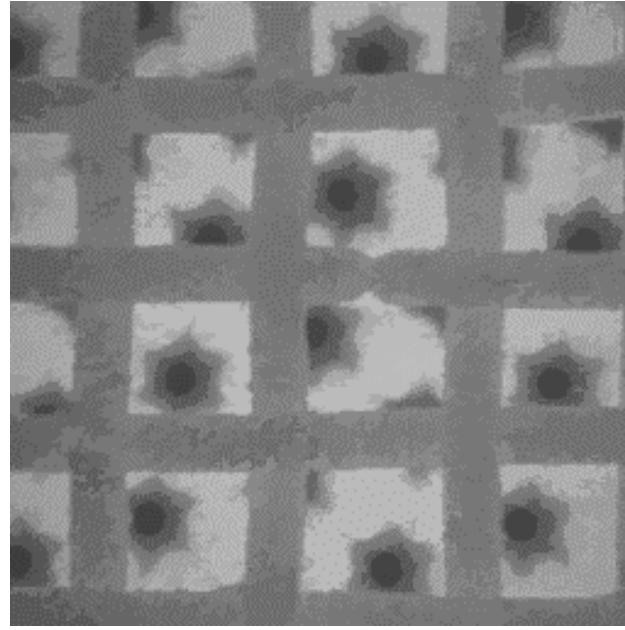
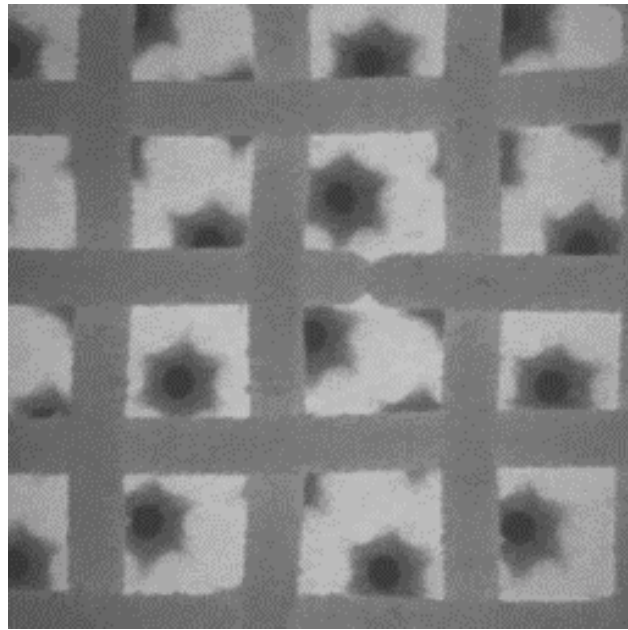
$\varphi(d) = k \cdot d^\alpha$



fonctions de Lipschitz géodésiques

Zones dans lesquelles la variation of f est lisse, mais pas au passage d'une zone à une autre

Exemple de Connexion par sauts dans \mathcal{L}



b)

c)

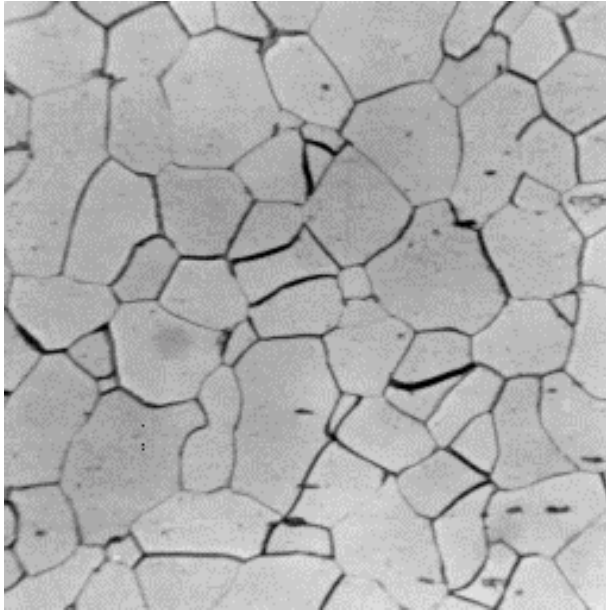
a) Image initiale : brûleur de gaz

b) saut d'amplitude 12 : 783 zones

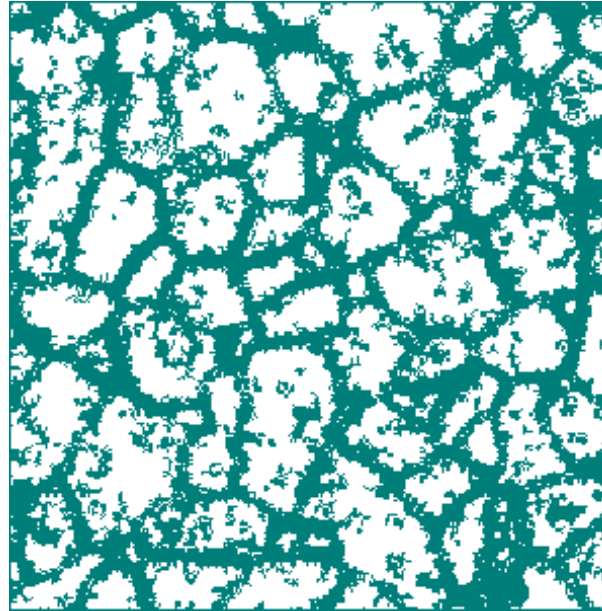
c) saut d'amplitude 24 : 63 zones

d) Nombre de zones en fonction des amplitudes des sauts

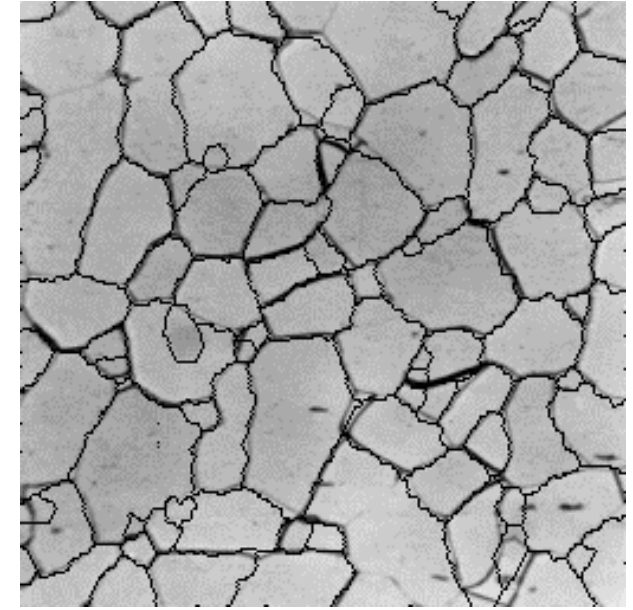
Autre exemple de Connexion par sauts dans \mathcal{L}



*a) Image initiale :
section polie de
grains d'alumine*



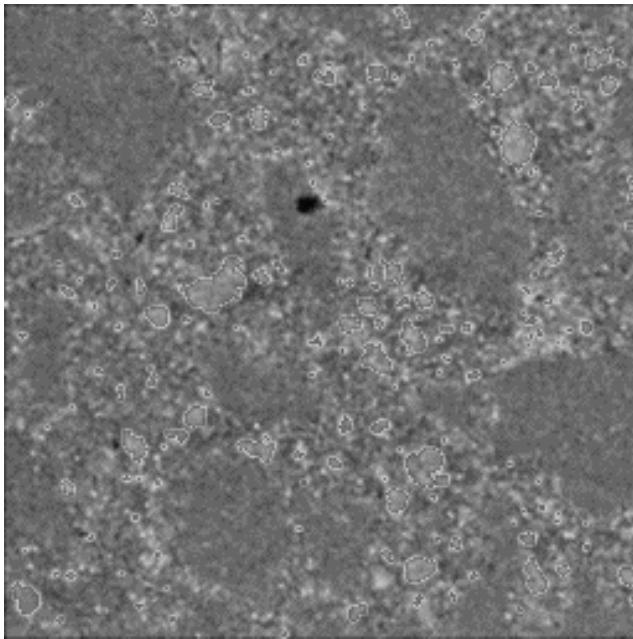
*b) connexion par sauts
d'amplitude 12:
- en sombre, ensemble
des composantes
connexes ponctuelles
- en blanc, bases
(connexes) des cylindres*



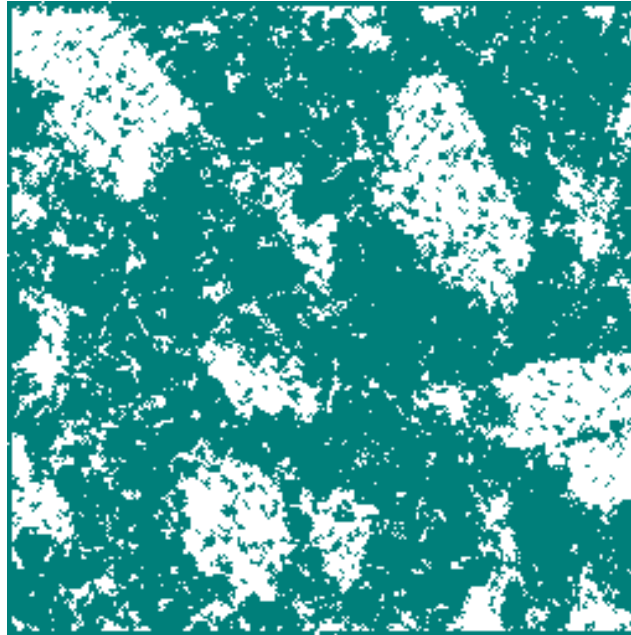
*c) Skiz de la réunion
des points sombres
de l' image b)*

Exemple de connexion lisse dans \mathcal{L} (I)

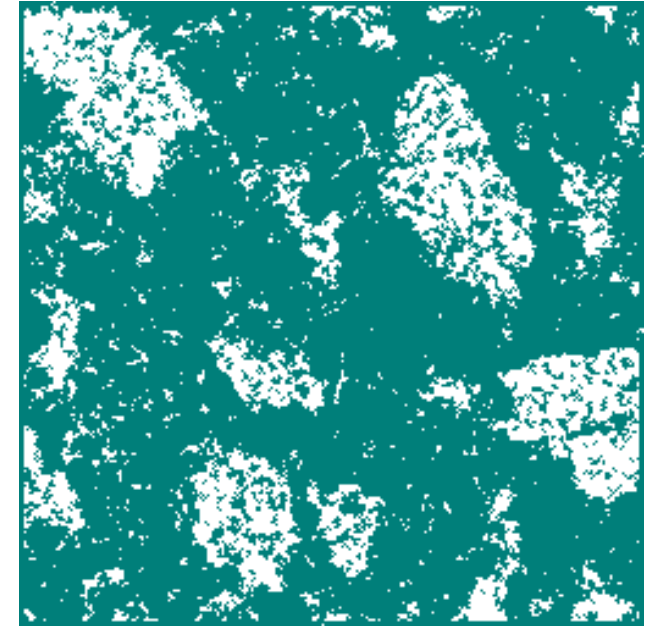
Commentaire : *Les deux phases de la micrographie ne peuvent pas être séparées par seuillage. Les connexions lisses les classent selon leur rugosité.*



*a) Image initiale:
micrographie
électronique de roche*



*b) connexion lisse de
paramètre 7*

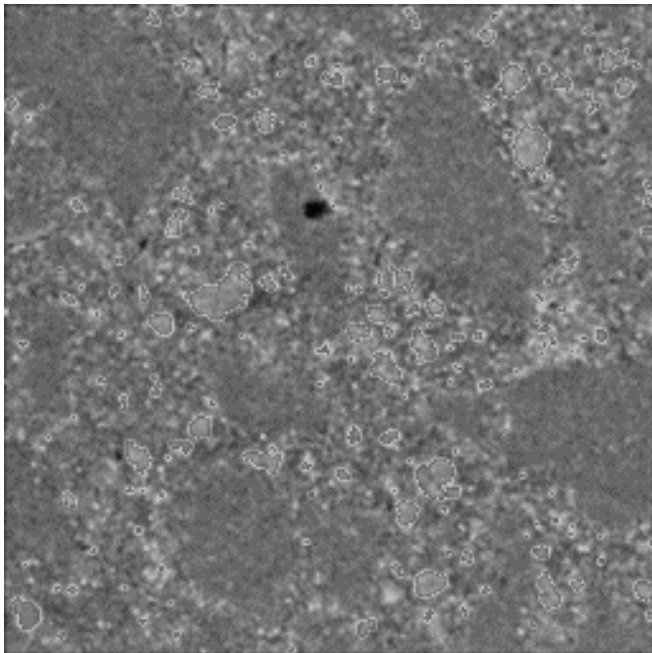


*c) connexion lisse de
paramètre 6*

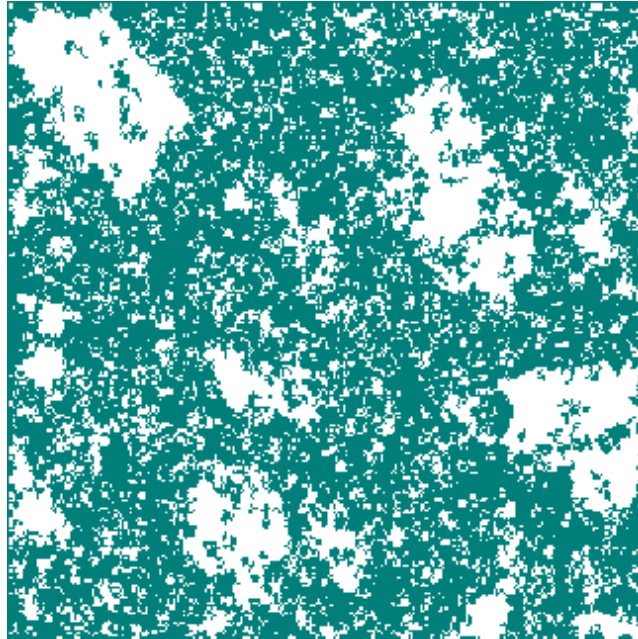
*(- en sombre, les composantes connexes ponctuelles
- en blanc, chaque particule est base d'un cylindre)*

Exemple de connexion lisse dans \mathcal{L} (II)

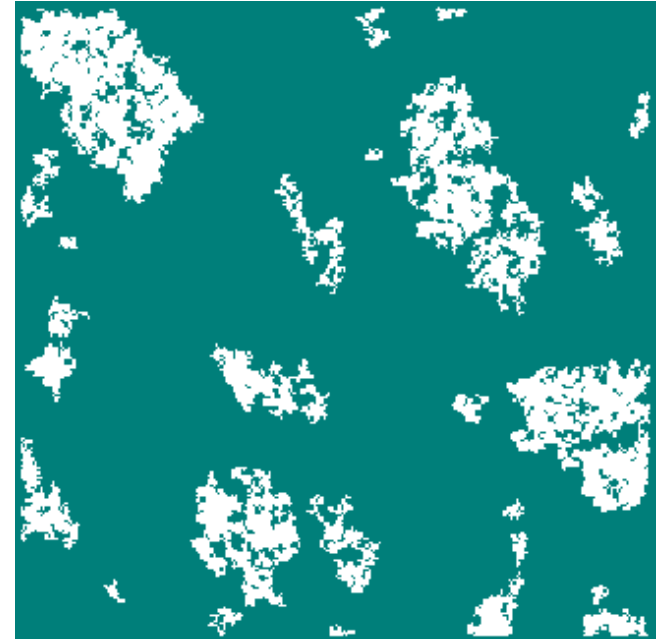
Commentaire : la connexion par sauts est la pire. Cependant, son intersection avec la lisse, qui produit une connexion nouvelle, donne satisfaction.



*a) Image initiale:
micrographie
électronique de roche.*



*b) Connexion par
sauts d'amplitude 12 .*



*c) Intersection des
connexions par sauts
(12) et lisse (6) .*

Références (I)

Sur les connexions binaires :

- **J. Serra**, Chapitre 2 dans *Image Analysis and Mathematical Morphology*, vol. 2, J. Serra (ed.), London: Acad. Press, 1988.
- **C. Ronse**, Set theoretical algebraic approaches to connectivity in continuous or digital spaces. *JMIV*, Vol.8, 1998, pp.41-58.

Sur les connexions pour les fonctions numériques:

- **J. Serra** Connectivity on Complete Lattices. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 9, (1998), pp 231-25.
- **J. Serra** Connections for sets and Functions (*to appear in Fundamenta Informaticae*).
- **J. Serra** Equicontinuous functions: a model for mathematical morphology, *SPIE San Diego Conf.* Vol. 1769, pp. 252-263, july 1992.
- **G. Matheron** Les treillis compacts. Tech. rep. N-23/90/G, *Ecole des Mines de Paris*, Part 1, 1990, part 2, 1996.

Sur les exemples :

- **S. Beucher D. Gorokhovic and J. Serra** Micromorph, logiciel de Morphologie Mathématique, *Transvalor* 1997.

Références (II)

Sur les opérateurs connexes :

- **J. Crespo, J. Serra, R.W. Schafer** Theoretical aspects of morphological filters by reconstruction. *Signal Processing*, 1995, Vol. 47, No 2, pp. 201-225.
- **H.J.A.M Heijmans**, Connected Operators. *Tech. Rep. CWI n° PNA-R9708*, April 1997
- **B. Marcotegui, F. Meyer** Morphological segmentation of image sequences. In *Mathematical Morphology and its applications to image processing*, J.Serra and P. Soille, eds. Kluwer, 1994, pp. 101-108.
- **J. Serra, Ph. Salembier** Connected operators and pyramids. In *SPIE, Vol. 2030, morphological image processing*, San Diego, July 1993, pp. 65-76.
- **F. Meyer**, 1/ From connected operators to levelings ; 2/ The levelings, in *Mathematical Morphology and its applications to image and signal processing*, H. Heijmans and J. Roerdink eds., Kluwer, 1998, pp 191-206.
- **G. Matheron**, Les nivellements, *Technical report, Centre de Morphologie Mathématique*, 1997 .
- **P. Salembier and A. Oliveras** Practical extensions of connected operators, in *Mathematical Morphology and its applications to image and signal processing*, Maragos P. et al., eds. Kluwer, 1996, pp. 97-110.